

5. Entscheidungen bei Risiko



12.12.

- 5.1 Charakterisierung der Entscheidungssituation bei Risiko
- 5.2 Klassische Entscheidungsprinzipien bei Risiko
- 5.3 Bernoulli-Prinzip

5.1 Charakterisierung der Entscheidungssituation bei Risiko – Begriffe I



Entscheidungen bei Risiko:

Dem Entscheidungsträger sind (subjektive oder objektive) Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der möglichen Zustände bekannt. ✓

Beispiele für Risikosituationen:

- Teilnahme an Glücksspielen (staatliche Lotterie, Roulette) ✓
- Abschluss eines Versicherungsvertrags ✓
- Lebensdauer, z.B. von Glühbirnen, CD-Playern ✓
- Kauf eines Gebrauchtwagens unter Hinzuziehung von Pannen- und TÜV-Statistiken ✓
- Disposition und Lagerhaltung: Abschätzung der Gefahr von Fehlmengen aufgrund der in der Vergangenheit nachgefragten Mengen eines Produkts ✓

5.1 Charakterisierung der Entscheidungssituation bei Risiko – Beispiel: TÜV-Report

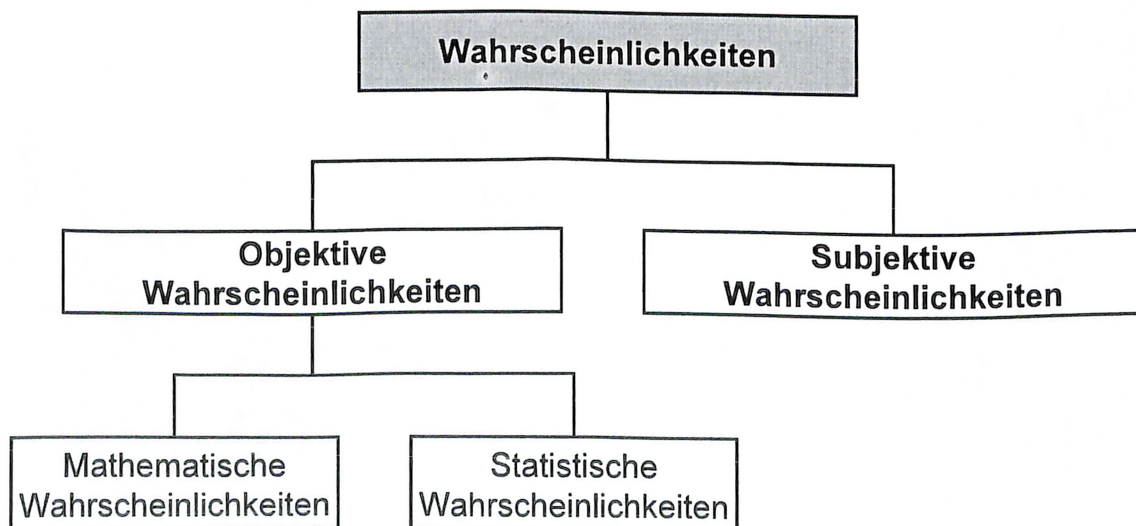


Autohändler Windig bietet einem Siegener Studenten drei jeweils zehnjährige Pkw zum Kauf an. Student Clever möchte vor seiner Entscheidung noch den TÜV-Report einsehen und trägt folgende Daten zu modellspezifischen Schadenswahrscheinlichkeiten zusammen:

	Porsche 911	Fiat Uno	VW Polo
Korrosion an Rahmen und tragenden Teilen	0,0 %	7,8 %	0,8 %
Vorder- und Hinterachse	2,5 %	10,5 %	10,2 %
Lenkungsspiel	0,6%	1,2 %	0,7 %
Beleuchtungsanlage	13,7 %	41,2 %	23,4 %
Wirkung der Fußbremse	0,6 %	9,3 %	4,9 %
Bremsleitungen und -schläuche	0,9 %	9,5 %	15,8 %
Auspuffanlage	0,8 %	13,9 %	10,2 %
Preis	22.222 €	950 €	950 €

Wie soll er weiter vorgehen?

5.1 Charakterisierung der Entscheidungssituation bei Risiko – Begriffe II



5.1 Charakterisierung der Entscheidungssituation bei Risiko – Begriffe III



1. **Subjektive Wahrscheinlichkeiten** entspringen dem nicht oder nur kaum kontrollierbaren Empfinden des Entscheidungsträgers und sind daher nicht intersubjektiv überprüfbar.
2. **Objektive Wahrscheinlichkeiten** (als mathematische oder statistische Wahrscheinlichkeiten) können aus intersubjektiv überprüfbaren Beobachtungen und Rechnungen abgeleitet werden.
 - **Mathematische Wahrscheinlichkeiten** können a priori errechnet werden, z.B. die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Lotto.
 - **Statistische Wahrscheinlichkeiten** können mithilfe von statistischen Auswertungen durch Extrapolation von Vergangenheitsbeobachtungen gewonnen werden.

5.1 Charakterisierung der Entscheidungssituation bei Risiko – Dominanzkriterien I



1. Die Kriterien der „**absoluten Dominanz**“ und der „**Zustandsdominanz**“ sind auch bei Risiko anwendbar.

2. Stochastische Dominanz erster Ordnung

Sind F_1 bzw. F_2 die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X_1 bzw. X_2 , so liegt stochastische Dominanz ersten Grades von X_1 über X_2 , d.h.

$$X_1 \succ_{\text{FSD}} X_2$$

genau dann vor, wenn

$$F_1(x) \leq F_2(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

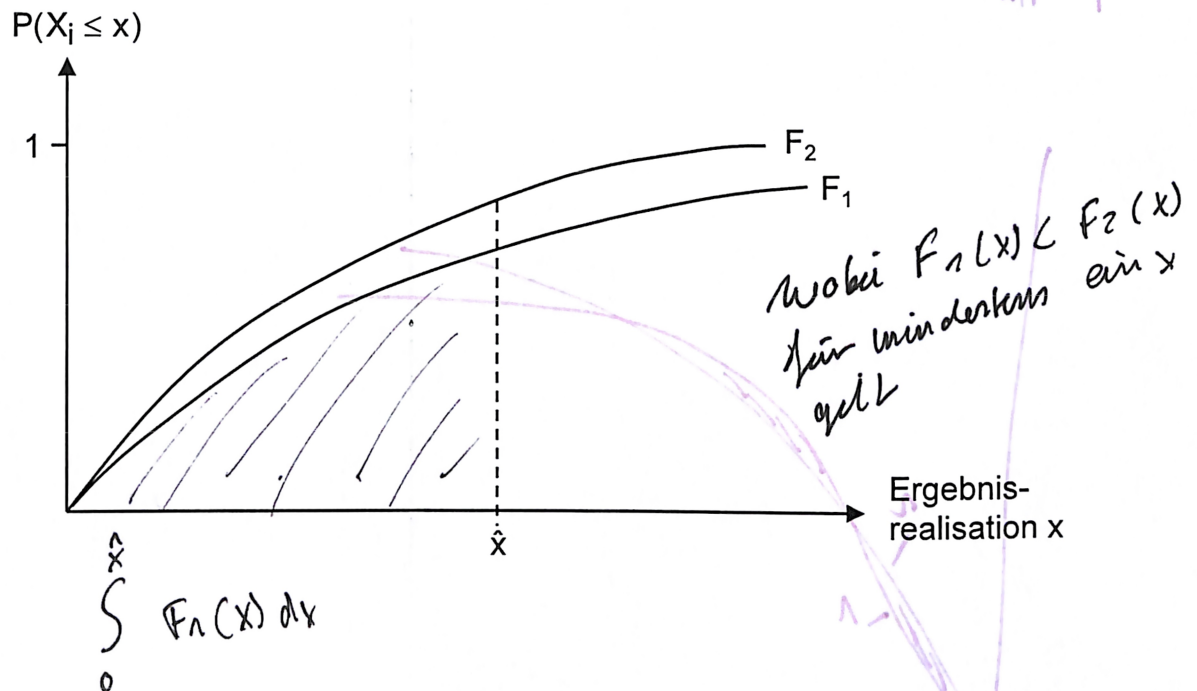
wobei $F_1(x) \leq F_2(x)$ für mindestens ein x gilt.

FSD steht für „first degree stochastic dominance“

5.1 Charakterisierung der Entscheidungssituation bei Risiko – Dominanzkriterien II



Stochastische Dominanz erster Ordnung liegt vor, wenn die Verteilungsfunktion F_1 unterhalb der Verteilungsfunktion F_2 verläuft:



5.1 Charakterisierung der Entscheidungssituation bei Risiko – Dominanzkriterien III



3. Stochastische Dominanz zweiter Ordnung

Stochastische Dominanz zweiten Grades, d.h.

$$X_1 \succ_{SSD} X_2$$

liegt genau dann vor, wenn

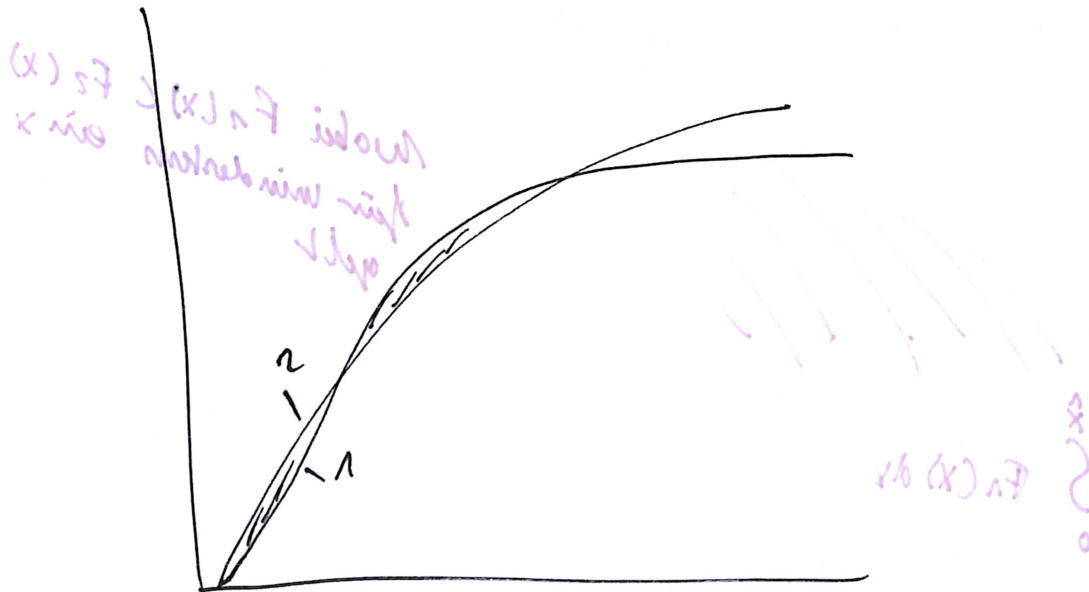
$$\int_{-\infty}^x F_1(y) dy \leq \int_{-\infty}^x F_2(y) dy \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

wobei wiederum die strikte Ungleichung für mindestens ein x gilt.

- SSD steht für „second degree stochastic dominance“
- Bei stochastische Dominanz erster Ordnung liegt immer auch stochastische Dominanz zweiter Ordnung vor.

beispiel nur stochastischen Denominator 2. ordn

$$P \quad x_1 \leq x$$



$$\bar{x} > \bar{z}$$

Fläche 1 ist größer Fläche 2, deshalb liegt
die stochastische Funktion vor.

5.2 Klassische Entscheidungsprinzipien bei Risiko – Überblick



Betrachtete Entscheidungsprinzipien:

- μ -Prinzip (Bayes-Regel)
- μ - σ -Prinzip
- μ - $x^{\min}$ -Prinzip (Hodges-Lehmann-Regel)
- μ -V-Prinzip (Verlusterwartungswertregel)

Literatur: Bitz (1981), S. 87 - 109

5.2 Klassische Entscheidungsprinzipien bei Risiko – μ -Prinzip (Bayes-Regel) I



Annahme: Risikoneutralität

$$\mu_i = \Phi(a_i) = \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot p_j \Rightarrow \max!$$

→ Eintrittswahrscheinlichkeit, dass Zustand j eintritt

Bei einmaliger Entscheidung ist das μ -Prinzip relativ ungeeignet. Bei häufigen Wiederholungen konvergiert das durchschnittliche Ergebnis gegen den Erwartungswert.

Gesetz der großen Zahl:

Bei einer großen Zahl von Wiederholungen sind die relativen Häufigkeiten, mit denen die möglichen Ausprägungen der Variablen eintreten, annähernd identisch mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten.

5.2 Klassische Entscheidungsprinzipien bei Risiko – μ -Prinzip (Bayes-Regel) II



Beispiel:

	$z_1 (p_1=0,1)$	$z_2 (p_2=0,3)$	$z_3 (p_3=0,6)$	μ_i
a_1	20	0	70	44
a_2	40	20	20	22
a_3	90	80	10	39

$$0,1 \cdot 20 + 0,3 \cdot 0 + 0,6 \cdot 70 = 44$$

Kritik:

- Bei Einzelentscheidungen werden Risikopräferenzen nicht berücksichtigt!
- Selbst bei hohem Erwartungswert ist der finanzielle Einsatz eines Entscheidungsträger in der Regel begrenzt (Risikopräferenz, Annahme der Linearität zwischen Ergebnisgrößen und Nutzenfunktion).

ist häufig nicht gegeben

5.2 Klassische Entscheidungsprinzipien bei Risiko – μ -Prinzip (Bayes-Regel) III



Petersburger Spiel:

„Peter wirft eine Münze in die Höhe und zwar solange, bis sie nach dem Niederfallen die Kopfseite zeigt; geschieht dies nach dem ersten Wurf, so soll er dem Paul 1 Dukaten geben, wenn aber erst nach dem zweiten: 2 [Dukaten], nach dem dritten: 4, nach dem vierten 8, und so fort in der Weise, dass nach jedem Wurf die Anzahl der Dukaten verdoppelt wird. Man fragt: Welchen Wert hat die Gewinnhoffnung für Paul?“

Zitiert aus: Meyer (2002), Originalquelle: Bernoulli, D.: Specimen Theoriae novae de Mensura Sortis, Übersetzung von Pringsheim, A.: Die Grundlagen der modernen Wertlehre; Daniel Bernoulli, Versuch einer neuen Theorie von Glücksfällen, Leipzig 1896, S. 46

Zum Beispiel:

6, 4, 10, 12, 5, 10, 15

1, 1, 2, 1, 8, 1, 8, 1, 2, 1

$$\frac{26}{10} = 260\%$$

$$\mu \quad \underbrace{0,5 \cdot 1}_{0,5} + \underbrace{0,8 \cdot 2}_{0,5} + \underbrace{0,5^3 \cdot 4}_{0,5} + \underbrace{0,5^4 \cdot 8}_{0,5} + \underbrace{0,5^5 \cdot 16}_{0,5} + \underbrace{0,5^6 \cdot 32}_{0,5} + \dots = \infty$$

mal 100 = 260 %

5.2 Klassische Entscheidungsprinzipien bei Risiko – μ - σ -Prinzip I



Die Beurteilung von Aktionen erfolgt durch $\Phi(\mu_i, \sigma_i)$ mit:

$$\mu_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot p_j$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n p_j \cdot (x_{ij} - \mu_i)^2} = \sqrt{E(x^2) - E(x)^2}$$

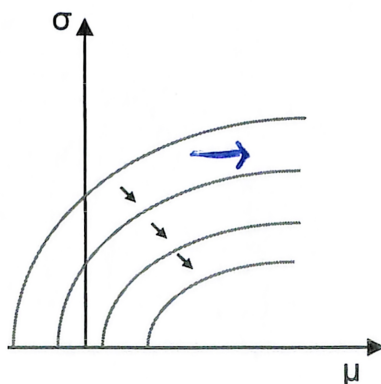
Berücksichtigung der Risikopräferenz:

$$\frac{\delta \Phi}{\delta \mu_i} > 0 \quad \wedge \quad \frac{\delta \Phi}{\delta \sigma_i} \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \begin{matrix} \text{bei Risikoaversion} \\ \text{bei Risikoneutralität} \\ \text{bei Risikofreude} \end{matrix}$$

5.2 Klassische Entscheidungsprinzipien bei Risiko – μ - σ -Prinzip II

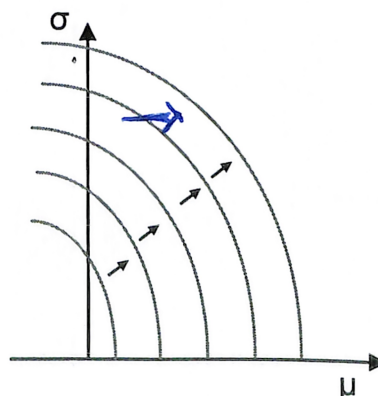


Risikoaversion ✓

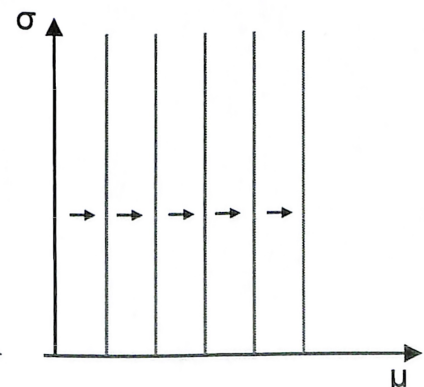


→ Verbesserungsrichtung

Risikofreude ✓



Risikoneutralität ✓



5.2 Klassische Entscheidungsprinzipien bei Risiko – μ - σ -Prinzip III



Beispiel:

Lotterie mit Gewinnen von 0 ($p=0,6$), 10 ($p=0,3$), 100 ($p=0,1$)

$$\mu_i = 0 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,3 + 100 \cdot 0,1 = 13$$

$$\sigma_i^2 = 0 \cdot 0,6 + 100 \cdot 0,3 + 10.000 \cdot 0,1 - 169 = 861 \Rightarrow \sigma_i = 29,3428$$

Beispielfunktionen:

$$\phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu_i - 0,2 \cdot \sigma_i = 13 - 0,2 \cdot 29,3428 = 7,1314$$

$$\phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu_i + 0,2 \cdot \sigma_i = 13 + 0,2 \cdot 29,3428 = 18,8686$$

$$\phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu_i - 0,05 \cdot \sigma_i^2 = 13 - 0,05 \cdot 861 = -30,05 \quad (\text{unsinniges Ergebnis})$$

$$\phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu_i - 0,01 \cdot (\mu_i^2 + \sigma_i^2) = 13 - 0,01 \cdot (169 + 861) = 2,7$$

5.2 Klassische Entscheidungsprinzipien bei Risiko – μ - σ -Prinzip IV



Beispiel: Zweimaliges Durchführen der Lotterie mit der Hälfte des Gewinns:

Gewinn	0	5	10	50	55	100
Wahrscheinlichkeit	0,36	0,36	0,09	0,12	0,06	0,01

$$\mu_i = 13 \quad \sigma_i^2 = 0,36 \cdot 0 + 0,36 \cdot 25 + 0,09 \cdot 100 + 0,12 \cdot 2500 + 0,06 \cdot 3025 + 0,01 \cdot 10000 - 169 = 430,50 \Rightarrow \sigma_i = 20,7485$$

Beispielfunktionen:

$$\phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu_i - 0,2 \cdot \sigma_i = 13 - 0,2 \cdot 20,7485 = 8,8503$$

$$\phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu_i + 0,2 \cdot \sigma_i = 13 + 0,2 \cdot 20,7485 = 17,1497$$

$$\phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu_i - 0,05 \cdot \sigma_i^2 = 13 - 0,05 \cdot 430,5 = -8,525 \quad (\text{unsinniges Ergebnis})$$

$$\phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu_i - 0,01 \cdot (\mu_i^2 + \sigma_i^2) = 13 - 0,01 \cdot (169 + 430,50) = 7,0050$$

5.2 Klassische Entscheidungsprinzipien bei Risiko – μ - σ -Prinzip V



Beurteilung des μ - σ -Prinzips:

- μ - σ -Prinzip kann unsinnige Ergebnisse liefern und gegen das Dominanzprinzip verstoßen
- Je geringer die Risikoscheu eines Anlegers ist, desto höher ist seine Renditeerwartung, aber auch das Risiko (z.B. bei seinem optimalen Wertpapierportfolio)
- Wiederholungen (z.B. mehrfaches Ziehen bei einer Lotterie) beeinflussen die Wahl einer Aktion (hohe Bedeutung für die Versicherungsmathematik)
- μ - σ -Prinzip widerspricht häufig dem Erwartungsnutzenprinzip (siehe Abschnitt 5.3)

5.2 Klassische Entscheidungsprinzipien bei Risiko – μ - $x^{\min}$ -Prinzip (Hodges-Lehmann-Regel) I



Neben dem Erwartungswert wird auch das schlechtest mögliche Ergebnis einer Aktion $x_i^{\min}$ berücksichtigt:

$$x_i^{\min} = \min_j \{x_{ij}\}$$

Ausprägungen:

1. Hodges-Lehmann-Regel

Wähle die Aktion, die $\max_i \Phi(\mu_i, x_i^{\min}) = \lambda \cdot \mu_i + (1 - \lambda) \cdot \min_j \{x_{ij}\}$ erfüllt.

$\lambda = 1$ Regel entspricht dem μ -Prinzip

$\lambda = 0$ Regel entspricht dem Maximin-Prinzip

$\mu - x^{\min}$ -Prinzip: Hodges-Lehmman-Regel

Beispiel:

	$z_1 (p_1 = 0,1)$	$z_2 (p_2 = 0,3)$	$z_3 (p_3 = 0,6)$	μ_i	$x^{\min}$
a_1	20	0	70	43	0
a_2	40	20	20	22	20
a_3	30	80	10	39	10

$$= \lambda \cdot \mu + (1 - \lambda) \cdot x^{\min}$$

$\lambda = 0$

$$\begin{aligned} a_1: & 0 \cdot 43 + (1 - 0) \cdot 0 = 0 \\ a_2: & 0 \cdot 22 + (1 - 0) \cdot 20 = 20 \leftarrow \text{opt.} \\ a_3: & 0 \cdot 39 + (1 - 0) \cdot 10 = 10 \end{aligned}$$

$\lambda = 0,2$

$$\begin{aligned} a_1: & 0,2 \cdot 43 + (1 - 0,2) \cdot 0 = 8,6 \\ a_2: & 0,2 \cdot 22 + (1 - 0,2) \cdot 20 = 20,4 \leftarrow \text{opt.} \\ a_3: & 0,2 \cdot 39 + (1 - 0,2) \cdot 10 = 15,8 \end{aligned}$$

$\lambda = 0,4$

$$\begin{aligned} a_1: & 0,4 \cdot 43 + (1 - 0,4) \cdot 0 = 17,2 \\ a_2: & 0,4 \cdot 22 + (1 - 0,4) \cdot 20 = 20,8 \\ a_3: & 0,4 \cdot 39 + (1 - 0,4) \cdot 10 = 21,6 \leftarrow \text{opt.} \end{aligned}$$

$$\underline{\lambda = 0,6}$$

$$a_1: 0,6 \cdot 43 + (1-0,6) \cdot 0 = 25,8$$

$$a_2: 0,6 \cdot 22 + (1-0,6) \cdot 20 = 11,2$$

$$a_3: 0,6 \cdot 39 + (1-0,6) \cdot 10 = 27,4 \leftarrow \text{opt.}$$

$$\underline{\lambda = 0,8}$$

$$a_1: 0,8 \cdot 43 + (1-0,8) \cdot 0 = 34,4 \leftarrow \text{opt.}$$

$$a_2: 0,8 \cdot 22 + (1-0,8) \cdot 20 = 11,6$$

$$a_3: 0,8 \cdot 39 + (1-0,8) \cdot 10 = 33,2$$

$$\underline{\lambda = 1,0}$$

$$a_1: 1 \cdot 43 + (1-1) \cdot 0 = 43 \leftarrow \text{opt.}$$

$$a_2: 1 \cdot 22 + (1-1) \cdot 20 = 22$$

$$a_3: 1 \cdot 39 + (1-1) \cdot 10 = 39$$

$$\underline{X_i^{\min} = 10; \lambda = 0}$$

$$a_1: 0 \cdot 43 + (1-0) \cdot (-10) = -10 \leftarrow \text{opt.}$$

$$a_2: 0 \cdot 22 + (1-0) \cdot (-10) = -10 \leftarrow \text{opt.}$$

$$a_3: 0 \cdot 39 + (1-0) \cdot (-10) = -10 \leftarrow \text{opt.}$$

$$\underline{X_i^{\min} = 10; \lambda = 0,2}$$

$$a_1: 0,2 \cdot 43 + (1-0,2) \cdot (-10) = -7,2$$

$$a_2: 0,2 \cdot 22 + (1-0,2) \cdot (-10) = -3,6$$

$$a_3: 0,2 \cdot 39 + (1-0,2) \cdot (-10) = -0,2 \leftarrow \text{opt.}$$

$$\underline{x_i^{\min} = 10 ; \lambda = 0.4}$$

$$a_1: 0.4 \cdot 43 + (1-0.4)(-10) = 11.2 \leftarrow \text{opt.}$$

$$a_2: 0.4 \cdot 22 + (1-0.4)(-10) = 9.8$$

$$a_3: 0.4 \cdot 39 + (1-0.4)(-10) = 9.6$$

$$\underline{x_i^{\min} = 10 ; \lambda = 0.6}$$

$$a_1: 0.6 \cdot 43 + (1-0.6)(-10) = 11.8 \leftarrow \text{opt.}$$

$$a_2: 0.6 \cdot 22 + (1-0.6)(-10) = 9.2$$

$$a_3: 0.6 \cdot 39 + (1-0.6)(-10) = 19.4$$

$$\underline{x_i^{\min} = 10 ; \lambda = 0.8}$$

$$a_1: 0.8 \cdot 43 + (1-0.8)(-10) = 32.4 \leftarrow \text{opt.}$$

$$a_2: 0.8 \cdot 22 + (1-0.8)(-10) = 15.6$$

$$a_3: 0.8 \cdot 39 + (1-0.8)(-10) = 29.2$$

$$\underline{x_i^{\min} = 10 ; \lambda = 1.0}$$

$$a_1: 1.0 \cdot 43 + (1-1) \cdot (-10) = 43 \leftarrow \text{opt.}$$

$$a_2: 1.0 \cdot 22 + (1-1) \cdot (-10) = 22$$

$$a_3: 1.0 \cdot 39 + (1-1) \cdot (-10) = 39$$

$$\underline{x_i^{\min} = 0 ; \lambda = 0}$$

$$a_1: 0 \cdot 43 + (1-0) \cdot 0 = 0 \leftarrow \text{opt.}$$

$$a_2: 0 \cdot 22 + (1-0) \cdot 0 = 0 \leftarrow \text{opt.}$$

$$a_3: 0 \cdot 39 + (1-0) \cdot 0 = 0 \leftarrow \text{opt.}$$

$$\underline{x_i^{\min} \quad 0; \quad \lambda = 0,2}$$

$$a_1: 0,2 \cdot 43 + (1-0,2) \cdot 0 = 8,6$$

$$a_2: 0,2 \cdot 22 + (1-0,2) \cdot 0 = 4,4$$

$$a_3: 0,2 \cdot 39 + (1-0,2) \cdot 0 = 7,8$$

$$\underline{x_i^{\min} \quad 0; \quad \lambda = 0,4}$$

$$a_1: 0,4 \cdot 43 + (1-0,4) \cdot 0 = 17,2$$

$$a_2: 0,4 \cdot 22 + (1-0,4) \cdot 0 = 8,8$$

$$a_3: 0,4 \cdot 39 + (1-0,4) \cdot 0 = 15,6$$

$$\underline{x_i^{\min} \quad 0; \quad \lambda = 0,6}$$

$$a_1: 0,6 \cdot 43 + (1-0,6) \cdot 0 = 25,8$$

$$a_2: 0,6 \cdot 22 + (1-0,6) \cdot 0 = 13,2$$

$$a_3: 0,6 \cdot 39 + (1-0,6) \cdot 0 = 23,4$$

$$\underline{x_i^{\min} \quad 0; \quad \lambda = 0,8}$$

$$a_1: 0,8 \cdot 43 + (1-0,8) \cdot 0 = 34,4$$

$$a_2: 0,8 \cdot 22 + (1-0,8) \cdot 0 = 17,6$$

$$a_3: 0,8 \cdot 39 + (1-0,8) \cdot 0 = 31,2$$

$$\underline{x_i^{\min} \quad 0; \quad \lambda = 1,0}$$

$$a_1: 1,0 \cdot 43 + (1-1) \cdot 0 = 43$$

$$a_2: 1,0 \cdot 22 + (1-1) \cdot 0 = 22$$

$$a_3: 1,0 \cdot 39 + (1-1) \cdot 0 = 39$$

$$\underline{X_{\lambda} \min 10, \lambda = 0}$$

$$a_1: 0 \cdot 43 + (1-0) \cdot 10 = 10$$

$$a_2: 0 \cdot 22 + (1-0) \cdot 10 = 10$$

$$a_3: 0 \cdot 39 + (1-0) \cdot 10 = 10$$

$$\underline{X_{\lambda} \min 10, \lambda = 0.2}$$

$$a_1: 0.2 \cdot 43 + (1-0.2) \cdot 10 = 16.6$$

$$a_2: 0.2 \cdot 22 + (1-0.2) \cdot 10 = 12.4$$

$$a_3: 0.2 \cdot 39 + (1-0.2) \cdot 10 = 15.8$$

$$\underline{X_{\lambda} \min 10; \lambda = 0.4}$$

$$a_1: 0.4 \cdot 43 + (1-0.4) \cdot 10 = 23.2$$

$$a_2: 0.4 \cdot 22 + (1-0.4) \cdot 10 = 14.8$$

$$a_3: 0.4 \cdot 39 + (1-0.4) \cdot 10 = 21.6$$

$$\underline{X_{\lambda} \min 10; \lambda = 0.6}$$

$$a_1: 0.6 \cdot 43 + (1-0.6) \cdot 10 = 31.8$$

$$a_2: 0.6 \cdot 22 + (1-0.6) \cdot 10 = 17.2$$

$$a_3: 0.6 \cdot 39 + (1-0.6) \cdot 10 = 27.4$$

$$\underline{X_{\lambda} \min 10; \lambda = 0.8}$$

$$a_1: 0.8 \cdot 43 + (1-0.8) \cdot 10 = 36.4$$

$$a_2: 0.8 \cdot 22 + (1-0.8) \cdot 10 = 19.6$$

$$a_3: 0.8 \cdot 39 + (1-0.8) \cdot 10 = 33.2$$

$$\underline{x_i^{\min} 10; \lambda = 10}$$

$$a_1: 1,0 \cdot 43 + (1-1) \cdot 10 = 43$$

$$a_2: 1,0 \cdot 22 + (1-1) \cdot 10 = 22$$

$$a_3: 1,0 \cdot 39 + (1-1) \cdot 10 = 39$$

$$\underline{x_i^{\min} 20; \lambda = 0}$$

$$a_1: 0 \cdot 43 + (1-0) \cdot 20 = 20$$

$$a_2: 0 \cdot 22 + (1-0) \cdot 20 = 20$$

$$a_3: 0 \cdot 39 + (1-0) \cdot 20 = 20$$

$$\underline{x_i^{\min} 20; \lambda = 0,2}$$

$$a_1: 0,2 \cdot 43 + (1-0,2) \cdot 20 = 24,6$$

$$a_2: 0,2 \cdot 22 + (1-0,2) \cdot 20 = 20,4$$

$$a_3: 0,2 \cdot 39 + (1-0,2) \cdot 20 = 23,8$$

$$\underline{x_i^{\min} 20; \lambda = 0,4}$$

$$a_1: 0,4 \cdot 43 + (1-0,4) \cdot 20 = 29,2$$

$$a_2: 0,4 \cdot 22 + (1-0,4) \cdot 20 = 20,8$$

$$a_3: 0,4 \cdot 39 + (1-0,4) \cdot 20 = 27,6$$

$$\underline{x_i^{\min} 20; \lambda = 0,6}$$

$$a_1: 0,6 \cdot 43 + (1-0,6) \cdot 20 = 33,8$$

$$a_2: 0,6 \cdot 22 + (1-0,6) \cdot 20 = 21,2$$

$$a_3: 0,6 \cdot 39 + (1-0,6) \cdot 20 = 31,4$$

$$\underline{x_i^{\min} \quad 20; \lambda = 0,8}$$

$$a_1: 0,8 \cdot 43 + (1-0,8) \cdot 20 = 38,4$$

$$a_2: 0,8 \cdot 22 + (1-0,8) \cdot 20 = 21,6$$

$$a_3: 0,8 \cdot 39 + (1-0,8) \cdot 20 = 35,2$$

$$\underline{x_i^{\min} \quad 20; \lambda = 1,0}$$

$$a_1: 1 \cdot 43 + (1-1) \cdot 20 = 43$$

$$a_2: 1 \cdot 22 + (1-1) \cdot 20 = 22$$

$$a_3: 1 \cdot 39 + (1-1) \cdot 20 = 39$$

$$\underline{x_i^{\min} \quad 30; \lambda = 0}$$

$$a_1: 0 \cdot 43 + (1-0) \cdot 30 = 30$$

$$a_2: 0 \cdot 22 + (1-0) \cdot 30 = 30$$

$$a_3: 0 \cdot 39 + (1-0) \cdot 30 = 30$$

$$\underline{x_i^{\min} \quad 30; \lambda = 0,2}$$

$$a_1: 0,2 \cdot 43 + (1-0,2) \cdot 30 = 32,6$$

$$a_2: 0,2 \cdot 22 + (1-0,2) \cdot 30 = 28,4$$

$$a_3: 0,2 \cdot 39 + (1-0,2) \cdot 30 = 31,8$$

$$\underline{x_i^{\min} \quad 30; \lambda = 0,4}$$

$$a_1: 0,4 \cdot 43 + (1-0,4) \cdot 30 = 35,2$$

$$a_2: 0,4 \cdot 22 + (1-0,4) \cdot 30 = 26,8$$

$$a_3: 0,4 \cdot 39 + (1-0,4) \cdot 30 = 33,6$$

$$\underline{X_i^{\min} \ 30, \lambda = 0.16}$$

$$a_1: 0.16 \cdot 43 + (1 - 0.16) \cdot 30 = 37.8$$

$$a_2: 0.16 \cdot 22 + (1 - 0.16) \cdot 30 = 25.2$$

$$a_3: 0.16 \cdot 39 + (1 - 0.16) \cdot 30 = 35.4$$

$$\underline{X_i^{\min} \ 30, \lambda = 0.18}$$

$$a_1: 0.18 \cdot 43 + (1 - 0.18) \cdot 30 = 40.4$$

$$a_2: 0.18 \cdot 22 + (1 - 0.18) \cdot 30 = 41.6$$

$$a_3: 0.18 \cdot 39 + (1 - 0.18) \cdot 30 = 37.2$$

$$\underline{X_i^{\min} \ 30, \lambda = 1.0}$$

$$a_1: 1 \cdot 43 + (1 - 1) \cdot 30 = 43$$

$$a_2: 1 \cdot 22 + (1 - 1) \cdot 30 = 22$$

$$a_3: 1 \cdot 39 + (1 - 1) \cdot 30 = 39$$

5.2 Klassische Entscheidungsprinzipien bei Risiko – μ - $x^{\min}$ -Prinzip (Hodges-Lehmann-Regel) II



2. Begrenzung der Maximalverluste

$$\max_i \{\mu_i\}, \quad \text{mit: } x_i^{\min} \geq \bar{x}$$

Beispiel:

	$z_1 (p_1=0,1)$	$z_2 (p_2=0,3)$	$z_3 (p_3=0,6)$	μ_i
a_1	20	0	70	43
a_2	40	20	20	22
a_3	90	80	10	39

- a) Berechnen Sie die beste Aktion für λ -Werte von 0 / 0,2 / 0,4 / 0,6 / 0,8 / 1!
- b) Ermitteln Sie die beste Aktion für Mindestniveaus von -10, 0, 10, 20, 30!

5.2 Klassische Entscheidungsprinzipien bei Risiko – μ - $x^{\min}$ -Prinzip (Hodges-Lehmann-Regel) III



Beurteilung:

- Beide Ausprägungen des μ - $x^{\min}$ -Prinzips sind mit dem Dominanzprinzip vereinbar
- Das μ - $x^{\min}$ -Prinzip kann zu wenig plausiblen Entscheidungen führen

Beispiel zum Casino-Spiel für die Urtaulussache

	z_1	z_2
a_1	1000	1000
a_2	4000	0
p	18/37	19/37

① $u(x) = x^2$

	z_1	z_2
a_1	10^6	10^6
a_2	$4 \cdot 10^6$	0

② $u(x) = \sqrt{x}$

	z_1	z_2
a_1	31,6	31,6
a_2	44,7	0

für ①

$$Eu(a_1) = 18/37 \cdot 10^6 + 19/37 \cdot 10^6 = 10^6$$

$$Eu(a_2) = 18/37 \cdot 4 \cdot 10^6 + 19/37 \cdot 0 = 1,94 \cdot 10^6$$

$$a_1 < a_2$$

für ②

$$Eu(a_1) = 31,6$$

$$Eu(a_2) = 18/37 \cdot 44,7 = 21,75$$

$$a_1 > a_2$$

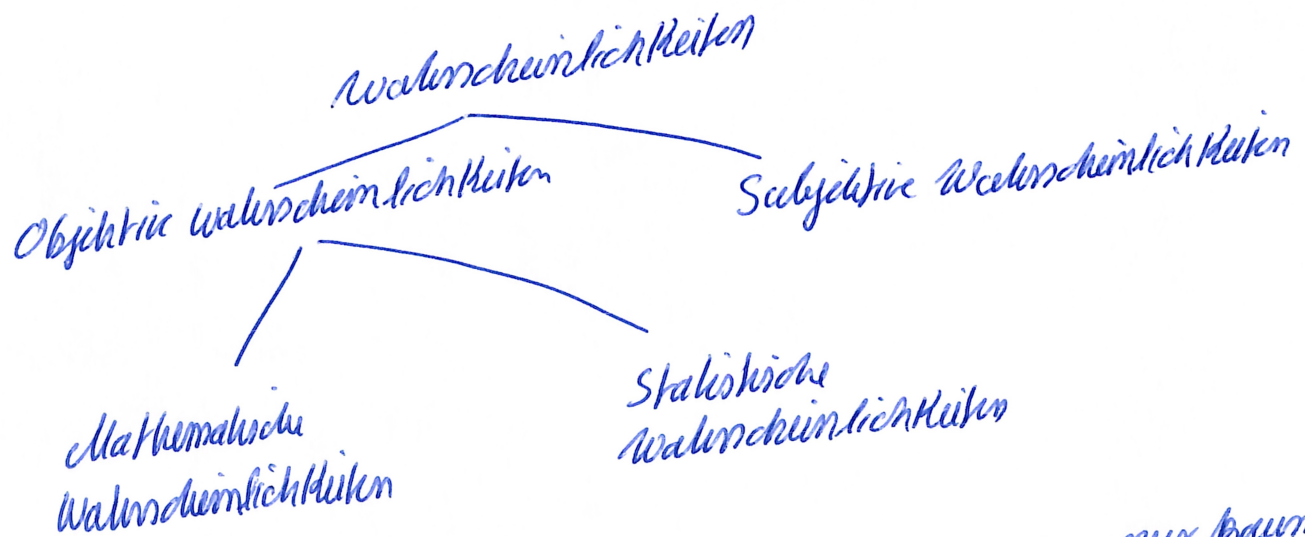
Entscheidungen bei Risiko

→ Charakterisierung der Entscheidungssituation bei Risiko

Dem Entscheidungsträger sind (subjektive oder objektive) Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der möglichen Zustände bekannt.

BSP: - Teilnahme an Glücksspielen (Lotterie, Roulette)

- Abschluss eines Versicherungsvertrags
- Lebensdauer von Glühbirnen / CD Playern
- Kauf eines Gebrauchtwagens unter Kenntnis von Rufen- und Tür-Statistiken
- Disposition und Lagerhaltung: Abschätzung der Gefahr von Fehl-meldungen aufgrund der in der Vergangenheit nachgefragten Mengen eines Produkts



- Subjektive Wahrscheinlichkeiten entspringen dem Nicht oder nur kaum kontrollierbaren Empfinden des Entscheidungsträgers und sind daher nicht intersubjektiv überprüfbar.
- Objektive Wahrscheinlichkeiten können können aus intersubjektiv überprüfbaren Beobachtungen und Packungen abgeleitet werden.
 - Mathematische Wahrscheinlichkeiten können a priori errechnet werden, z.B. die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Lotto
 - Statistische Wahrscheinlichkeiten können mithilfe von statistischen Auswertungen durch Extrapolation von Vergangenheitsbeobachtungen gewonnen werden.

Dominanzkriterien

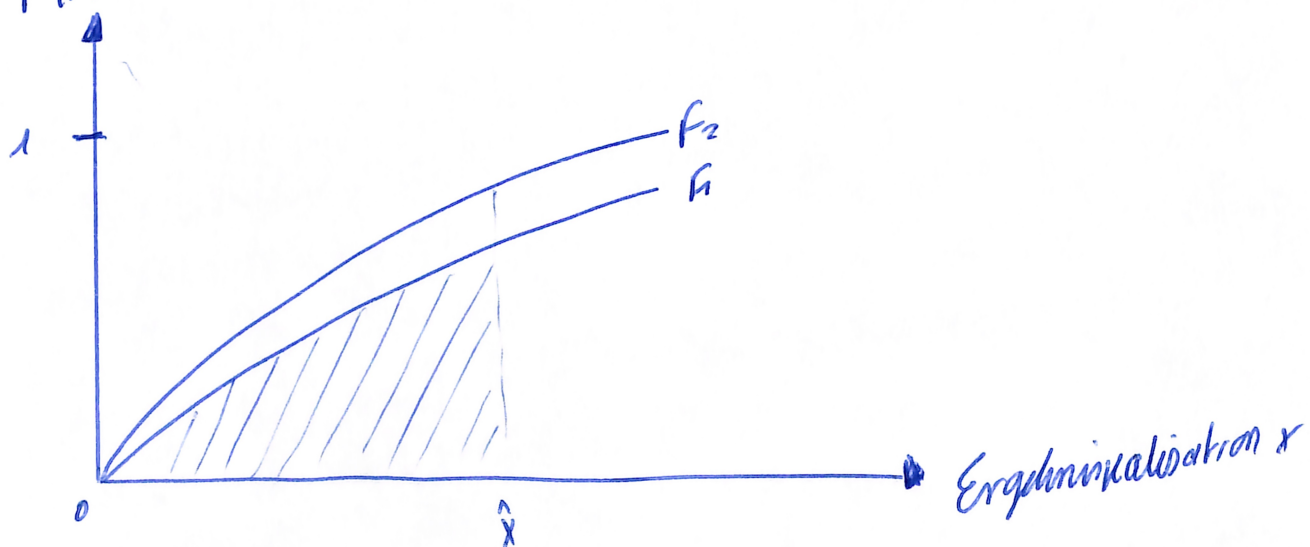
1. Die Kriterien der absoluten Dominanz und der Zustandsdominanz sind auch bei Risiko anwendbar
2. Stochastische Dominanz erster Ordnung
Sind F_1 bzw. F_2 die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen X_1 bzw. X_2 , so liegt stochastische Dominanz ersten Grades von X_1 über X_2 , d.h.

$$X_1 \succ_{FSD} X_2$$
 First degree stochastic domin. genau dann vor, wenn

$$F_1(x) \leq F_2(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Stochastische Dominanz erster Ordnung liegt vor, wenn die Verteilungsfunktion F_1 unterhalb der Verteilungsfunktion F_2 verläuft:

$P(X_i \leq x)$



Die Verteilungsfunktionen dürfen sich nicht schneiden

Stochastische Dominanz zweiter Ordnung

$x_1 \succ_{SSD} x_2$ Second degree stochastic dominance

wenn

$$\int_{-\infty}^x F_1(y) dy \leq \int_{-\infty}^x F_2(y) dy \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Wobei wiederum die obere Ungleichung für mind. ein x gilt.

→ Bei Stochastischer Dominanz erster Ordnung liegt immer auch Stochastische Dominanz zweiter Ordnung vor.

Klassische Entscheidungsprinzipien bei Risiko

μ -Prinzip (Bayes-Regel)

Annahme: Risikoneutralität

$$\mu_i = \Phi(a_i) = \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot p_j \Rightarrow \max$$

Eintrittswahrscheinlichkeit, dass Zustand j eintritt

Bei einmaliger Entscheidung ist das μ -Prinzip relativ ungeeignet. Bei häufigen Wiederholungen konvergiert das durchschnittliche Ergebnis gegen den Erwartungswert.

Gesetz der großen Zahl:

Bei einer großen Zahl von Wiederholungen sind die relativen Häufigkeiten mit denen die möglichen Ausprägungen der Variablen eintreten, annähernd identisch mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten.

Merkmale:

- Bei Einzelentscheidungen werden Risikopräferenzen nicht berücksichtigt
- Selbst bei hohem Erwartungswert ist der finanzielle Ertrag einer Entscheidungsträger in der Regel begrenzt

μ - σ -Prinzip

Die Beurteilung von Aktionen erfolgt durch $\Phi(\mu_i, \sigma_i)$ mit:

$$\mu_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot p_j$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{j=1}^n p_j (x_{ij} - \mu_i)^2} = E(x^2) - E(x)^2$$

Berücksichtigung der Risikopräferenz

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mu_i} > 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_i} \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 0 \quad \begin{array}{l} \text{bei Risikoaversion} \\ \text{bei Risikoneutralität} \\ \text{bei Risikofreude} \end{array}$$

Beurteilung des μ - σ -Prinzips:

- μ - σ Prinzip kann unsinnige Ergebnisse liefern und gegen das Dominanzprinzip verstoßen
- Je geringer die Risikofreude eines Anlegers ist, desto höher ist seine Renditerwartung, aber auch das Risiko (z.B. bei seinem optimalen Wertpapierportfolio)
- Wiederholungen (z.B. mehrfaches Ziehen bei einer Lotterie) beeinflussen die Wahl der Aktion

$\mu - x^{\min}$ - Prinzip (Hodges-Lehmann-Regel)

Neben dem Erwartungswert wird auch das schlechtest mögliche Ergebnis einer Aktion $x_i^{\min}$ berücksichtigt

$$x_i^{\min} = \min_j \{x_{ij}\}$$

Ausprägungen:

1. Hodges-Lehmann-Regel

Wähle die Aktion, die $\max_i \phi(\mu_i, x_i^{\min}) = \lambda \mu_i + (1-\lambda) \cdot \min_j \{x_{ij}\}$ erfüllt.

$\lambda = 1$ Regel entspricht dem μ -Prinzip

$\lambda = 0$ Regel entspricht dem Maximum-Prinzip

Beurteilung:

- Beide Ausprägungen des $\mu - x^{\min}$ -Prinzips sind mit dem Dominanzprinzip vereinbar
- Das $\mu - x^{\min}$ -Prinzip kann zu wenig plausiblen Entscheidungen führen.

μ -V-Regel

$$V_i = \sum_{j=1}^n \tilde{x}_{ij} \cdot p_j \quad \text{mit} \quad \tilde{x}_{ij} \begin{cases} 0, & \text{falls } x_{ij} \geq 0 \\ -x_{ij}, & \text{falls } x_{ij} < 0 \end{cases}$$

Beurteilung des μ -V-Prinzip

- μ -V-Prinzip steht im Einklang mit dem Dominanz-Prinzip
- Der untere Ast der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird im Gegensatz zum μ -x_{min}-Prinzip nicht nur punktuell, sondern vollständig berücksichtigt
- Je nach der (willkürlich) gewählten Bewertungsfunktion ϕ sind wenig plausible Entscheidungsempfehlungen möglich.

Bernoulli-Prinzip

Für den Entscheidungsträger existiert eine (auf der Menge aller Ergebnisse definierte und bis auf eine wachsende lineare Transformation eindeutige) Nutzenfunktion u mit der Eigenschaft, dass die verschiedenen Aktionen aufgrund des zugehörigen Nutzenvergleichs beurteilt werden.

$$a \succeq b \Leftrightarrow E u(a) \geq E u(b)$$

- Charakterisierung des Bernoulli-Prinzips:
- Zeichnung der Erweiterungsmaximierung
- Erwartungspunkt wird mithilfe der Nutzenfunktion des Entscheidungsträgers ermittelt.
- Existenz einer solchen Nutzenfunktion wird vorausgesetzt
- Höhen-, Achsen-, Zeit- und Risikopräferenzen (kombinierbar) in die Nutzenfunktion ein.

Vorgehen

7

1. Ermittlung der Ergebnismatrix
2. Aufstellung bzw. Ermittlung der Nutzenfunktion (RNF)

Bedingungen:

- a) Die RNF spiegelt den Nutzen jeden Ergebnisses der Aktion i und aller möglichen Zustände j wieder.

$$u_{ij} = \underbrace{u(x_{ij})}_{\text{Nutzen der Ergebnisausprägung } i}$$

- b) Es gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} > 0 \quad \text{falls ein höheres } x \text{ besser ist}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} < 0 \quad \text{falls ein niedrigeres } x \text{ besser ist}$$

Die Nutzenfunktion kann beliebig durch $\bar{u} = \alpha + \beta \cdot u$ mit $\beta > 0$ positiv-linear transformiert werden, ohne dass sich dadurch die Präferenzordnung der Aktionen ändert.

→ Derartige linear-transformierte RNF sind in dem Sinne äquivalent, dass sie für jedes beliebige Entscheidungsproblem zu der gleichen Präferenzordnung führen.

3. Transformation der Ergebnismatrix in die Nutzenmatrix

$$u_{ij} = u(x_{ij})$$

4. Maximierung des Erwartungsnutzens:
Ermittlung derjenigen Aktion i , für die der Erwartungsnutzen maximiert wird:

$$E(a_i) = Eu(a_i) = \sum_{j=1}^n u(x_{ij}) p_j = \sum_{j=1}^n u_{ij} \cdot p_j \Rightarrow \max!$$

Bestimmung der Risikonutzenfunktion I

8

Problem: Risikonutzenfunktion kann vom Entscheidungsträger in der Regel nicht angegeben werden.

(Lösung des Problems durch hypothetische Wahlakte und mit folgendem Vorgehen:

1. Normierung der RNF auf $[0,1]$

$u(x') = 0$ für das ungünstigste Ergebnis

$u(x) = 1$ für das günstigste Ergebnis

Eine solche Normierung ist nicht zwingend erforderlich; sie erleichtert aber das weitere Vorgehen.

2. Festlegung von einem oder mehreren hypothetischen Wahlakten

- Festlegung von $\bar{x}$ als sicherem Einkommen (Sicherheitsäquivalent)

- Festlegung der einfachen Chance (x, p, x')

3. Bestimmung von kritischen Erfolgswahrscheinlichkeiten

Variation der kritischen Erfolgswahrscheinlichkeit p erfolgt stetig, bis die kritische Erfolgswahrscheinlichkeit p^* gefunden ist, bei der die einfache Chance und das sichere Einkommen vom Entscheidungsträger als gleichwertig angesehen werden:

$\bar{x} \approx (x, p^*, x')$

4. Bestimmung der Nutzenwerte

Aus $\bar{x} \approx (x, p^*, x')$ folgt $u(\bar{x}) = p^* \cdot u(x) + 1(-p^*) \cdot u(x')$

Aufgrund der Normierung gilt: $u(\bar{x}) = p^*$

Bemerkungen:

- Es werden so viele Wahlrunden durchgeführt, bis die ANF hinreichend genau festgelegt werden kann.
- In den meisten Fällen läßt sich keine stetig differenzierbare ANF identifizieren, ausser genau alle individuellen Erfolgswahrscheinlichkeiten zu finden sind.

Risikoeinstellung und Geldnutzen

Problem: Simultane Erfassung von Geldnutzen und Risikopräferenz (Prisikopräferenz) läßt keine getrennte Erfassung der beiden Nutzenarten zu.

Beispiel: Entscheidungsträger kann zwischen sicherem Einkommen von 100 Euro und einem einfachen Chance $(x; p; x') = (0, 0,1; 1000)$ wählen.

Mögliche Interpretationen bei Entscheidung für das sichere Einkommen:

- Entscheidungsträger ist risikofreudig
- Entscheidungsträger ist risikoneutral oder sogar risikofreudig, aber der Geldnutzen steigt unproportional mit einem steigenden Betrag (abnehmender Grenznutzen des Geldes)

Schlußfolgerung: Messung des Gesamtnutzen ist einfacher als die Einzelmessung beider Nutzenkomponenten.

Axiome des Bernoulli Prinzips

untersucht man die Gültigkeit der folgenden vier Axiome, so ergibt sich zwangsläufig eine Entscheidungsregel, die dem Bernoulli-Prinzip entspricht.

1. Ordinalprinzip

Eine rationale Entscheidungsregel muss die Aktionen ordinal (also in Reihenfolge) ordnen, d.h. sie ihrer Vorziehenswürdigkeit nach in eine eindeutige Reihenfolge bringen.

Daraus folgt:

1) Vergleichbarkeit: Für zwei Aktionen a_1, a_2 soll entweder eine der Präferenzrelationen $a_1 \succ a_2$, $a_2 \succ a_1$ oder $a_1 \sim a_2$ erfüllt sein, was voraussetzt, dass die beiden Aktionen grundsätzlich als vergleichbar anzurechnen sind.

2) Reihenfolge: Sind drei Aktionen a_1, a_2, a_3 gegeben, für die $a_1 \succeq a_2$ und $a_2 \succeq a_3$ gilt, so soll daraus auch zwingend $a_1 \succeq a_3$ folgen.

2. Dominanzprinzip (Stochastische Dominanz 1. Ordnung)

Eine rationale Entscheidungsregel muss eine Aktion a_1 gegenüber einer Aktion a_2 präferieren, wenn die Aktion a_1 die Aktion a_2 stochastisch dominiert (vgl. Abschnitt 5.1)

3. Stetigkeitsprinzip

a. Wahrscheinlichkeitsstetigkeit

Wenn bei einer sicheren Aktion mit dem Ergebnis $\bar{x}$ und einer einfachen Chance $(x, p; x')$ mit $x > \bar{x} > x'$ gilt, so lässt sich stets eine ähnliche Erfolgswahrscheinlichkeit p^* ($0 < p^* < 1$) finden, so dass gilt: $(x, p; x') \sim \bar{x}$

1. Nutzenstheorie: RNF verläuft stetig und ohne Sprungstellen

Bemerkung: Wahrscheinlichkeit und Nutzenstheorie stellen sicher, dass für jede einfache Chance ein Sicherheitsäquivalent existiert.

4. Substitutionsprinzip bzw. Unabhängigkeitsprinzip

Ist x eine beliebige Zufallsvariable und p eine beliebige Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1,00 ist $x \geq y$ und dann und nur dann, wenn $(x, p) \geq (y, p)$.

Bernoulli Prinzip - Beurteilung

Vorteile:

- Flexibilität und breiter Anwendungsbereich
- Plausible Vorgehensweise
- Bestätigung durch empirische Untersuchungen
- Gute theoretische Fundierung durch Axiome

Nachteile:

- Keine deutliche Trennung von Höhen-, Arten-, Zeit- und Risikopräferenzen
- Aufwand durch die Befragung der Entscheidungsträger
- Die RNF kann sich im Zeitablauf ändern

- Bestimmung der exakten Wahrscheinlichkeiten für Umweltzustände (relevant für alle Entscheidungsebenen bei Risiko)
- Hoher Aufwand der detaillierten Erfassung aller Umweltzustände und Handlungskonsequenzen (relevant für alle Entscheidungsebenen bei Risiko); Abhilfe durch Abstraktion

→ Dem Entscheidungsträger sind subjektive oder objektive Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der möglichen Zustände bekannt.

→ Subjektive Wahrscheinlichkeiten entspringen dem nicht oder nur kaum kontrollierbaren Empfinden des Entscheidungsträgers und sind daher nicht intersubjektiv überprüfbar.

→ Objektive Wahrscheinlichkeiten können aus intersubjektiv überprüfbaren Beobachtungen und Rechnungen abgeleitet werden.

- Mathematische Wahrscheinlichkeiten
- Statistische Wahrscheinlichkeiten

→ Bernoulli Prinzip:

Für den Entscheidungsträger existiert eine Nutzenfunktion u mit der Eigenschaft, daß die verschiedenen Aktionen aufgrund der zugehörigen Nutzenwartungswerte beurteilt werden.

$$a \succeq b \Leftrightarrow Eu(x_a) \geq Eu(x_b)$$

$$\Phi(a) = Eu(x_a)$$

→ μ -Prinzip: (Bayes Regel)

$$\mu_i = \Phi(a_i) = \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot p_j \rightarrow \max$$

mit p_j = Eintrittswahrscheinlichkeit, dass Zustand j eintritt.

→ σ Prinzip:

$$\mu_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot p_j$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n p_j (x_{ij} - \mu_i)^2} = E(x^2) - E(x)^2$$

Mathematische Entscheidungsprinzipien

$$\Phi(x) = E x$$

$$E x = \mu \quad (\text{Bayes Regel})$$

$$\Phi(x) = \Phi(\mu, \sigma)$$