

1

07.02.00

$f: \text{diff}' \text{bar}$ um $x_0 \in D(f) \subseteq \mathbb{R} : \Leftrightarrow$

$$\forall g \in \mathbb{R} \quad \lim_{h \rightarrow 0} E(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - g \right] = 0$$

$$* f(x_0+h) - f(x_0) = hg + h\varepsilon(h) \quad \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

- Def 8.4.1: Es sei $U(a) \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$; eine Funktion f heißt an der Stelle a genau dann ^(vollständig, total) differenzierbar (nicht partiell differenzierbar), wenn für hinreichend kleine Werte von $|h_i|$ ($i=1, \dots, n$) gilt

genau dem 1 Dimensionalen nachgebildet *

$$f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n) = f(a_1, \dots, a_n) + h_1 g_1 + \dots + h_n g_n + h_1 \varepsilon_1(h_1, \dots, h_n) + \dots + h_n \varepsilon_n(h_1, \dots, h_n)$$

- mit Zahlen $g_1, \dots, g_n$ die nicht von $h_1, \dots, h_n$ abhängen und Restgliedern $\varepsilon_i(h_1, \dots, h_n)$ mit $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_i(h) = 0$.

n Dimensionale h

Satz 8.4.2: Ist f an $a \in D(f)$ vollständig diff'bar so ist f auch stetig.

8.4.3: Ist f an $a \in D(f)$ vollständig diff'bar, so besitzt f dort partielle Ableitungen nach allen Variablen und es gilt:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_a = g_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

Bew:
$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_a = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{1}{h_i} \left(f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \right)$$

Funktion an der Zuwachsstelle (nur eine Komponente kommt hinzu)

8.4.1
$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{1}{h_i} (h_i g_i + h_i \varepsilon_i(0, \dots, h_i, \dots, 0))$$

$$= g_i + \lim_{h_i \rightarrow 0} \varepsilon_i(0, \dots, h_i, \dots, 0)$$

$$= g_i$$

$\rightarrow$ gegen null

umgebungander Stelle a

Satz 8.4.4 Es sei $U(a) \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$; gibt es ein $\delta > 0$, sodaß in $U_\delta(a)$ sämtliche partiellen Ableitungen 1. Ordnung von f existieren und ana stetig sind (po ist f an a vollständig diff'bar)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

an null nicht stetig

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2x_1^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \quad x \neq 0$$

$$f_{x_1}(0|x_2) = \frac{1}{x_2} \quad \text{Ableitung ist unbeschränkt in } U(0)$$

Def 8.4.5: ES sei f an $a \in \mathbb{R}^n$ vollständig diff'bar (genau wie im 1 dim.)

Differenz der beiden Funktionswerte

$$\Delta f|_a = f(a+h_1, \dots, a+h_n) - f(a_1, \dots, a_n)$$

heißt das vollständige (totale) Differential von f an a :

lineare Anteil

$$df|_a := g_1 \cdot h_1 + g_2 \cdot h_2 + \dots + g_n \cdot h_n$$

der Rest geht schneller gegen null und wird weggelassen.

Vollständige Differential um n -Dimensionalen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_a h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_a h_n$$

Vollständige Diff erential einer Funktion von n -Veränderlichen

BSP: 1.

$$f(x, y) = 4x^2 - 2y^3 + 5$$

Funktionswert an der neuen Stelle

$$\Delta f = f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

Es wird die Differenz beider Funktionen gesucht: also

$$= 4x^2 + 8xh + 4h^2 - 2y^3 + 6y^2k - 6yk^2 - 2y^2k - 2k^2 - 4x^2 + 2y^3$$

$\Delta f = f$

-man setzt $x+h$ in x^2 ein und differenziert (entsprechend $y+k$ in y einsetzen)

gehört zum vollständigen Differential (test nicht)

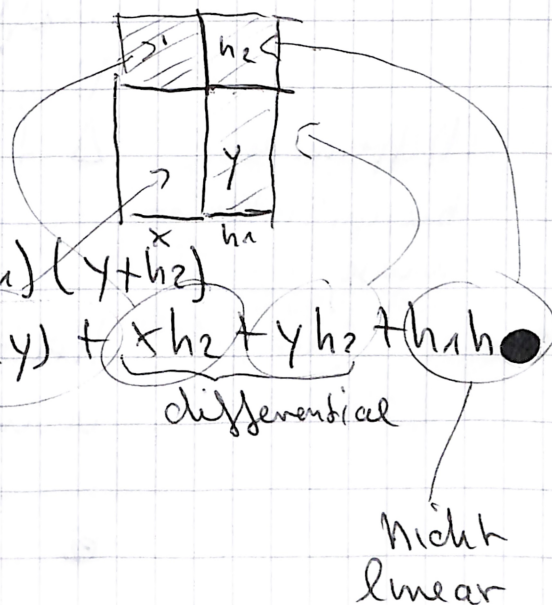
$$= 8xh - 6y^2k + 4h^2 - 6yk^2 - 2k^3$$

$$df = 8xh + 6y^2k$$

BSP: 2

$$f(x, y) = xy$$

$$\begin{aligned} f(x+h_1, y+h_2) &= (x+h_1)(y+h_2) \\ &= f(x, y) + \underbrace{xh_2 + yh_1 + h_1h_2}_{\text{differential}} \end{aligned}$$



Wenn h_1 und h_2 kleiner werden,
geht h_1h_2 schneller gegen null, da
 xh_1 & xh_2 proportional größer sind
als h_1h_2

(gleiches gilt in $\mathbb{R}^3$)

Tangentengleichung: $n=1$ $L(x) := f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$
Gleichung der Geraden $(x_0, f(x_0))$

$$\begin{aligned} n=2: L(x_1, x_2) &:= f(a_1, a_2) + df|_a \\ &= f(a_1, a_2) + f_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + \\ &\quad f_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) \end{aligned}$$

(Gleichung der Tangentialebene)

②

Satz 8.4.3 (Kettenregel): Es sei $u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n)$ an $a \in \mathbb{R}^n$ vollst. diff'bare Funktion mit $u_1(a) = b_1, \dots, u_m(a) = b_m$ und f eine an $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ vollständig diff'bare Funktion. Dann $F(x_1, \dots, x_n) = f(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n))$ an a vollständig diff'bar und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_a = \frac{\partial f}{\partial u_1} \Big|_b \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \Big|_a + \frac{\partial f}{\partial u_2} \Big|_b \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \Big|_a + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \Big|_b \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \Big|_a$$

($1 \leq i \leq n$) bzw.

$$dF \left(\sum_{j=1}^m f_{u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(\sum_{j=1}^m f_{u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots + \left(\sum_{j=1}^m f_{u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) dx_n$$

$m=1$ 8.3.4

6.3.7 $m=1$ ($n=1$) - Anzahl der Variablen

BSP: $f(x_1, x_2) = a x_1^d x_2^{1-d}$ ($0 < d < 1$)

$$x_1(r, s) = b e^{-s^2} + c r s$$

$$x_2(r, s) = d r^2 + s \sqrt{s}$$

$$F(r, s) = f(x_1(r, s), x_2(r, s))$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial s}$$

$$\alpha \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} (2be^{-s^2} s + cr) + \alpha(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}$$

$$\frac{3}{2} s^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\alpha \alpha (be^{-3s^2})^{\alpha-1}$$