

1

Niveaulinien (Ähnlinien auf einer Karte) $\rightarrow$ können sich nicht schneiden
 Schnitte durch die Höhenlinien ergeben Schnitte
 nur die Funktionswerte ergeben Fläche

Isoquanten

BSP: Produktionsfunktion

$$Q(L, K) = 3 L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}$$

Es sollen Niveaulinien zu

$$N_Q(9): 3^4 = L \cdot K^3$$

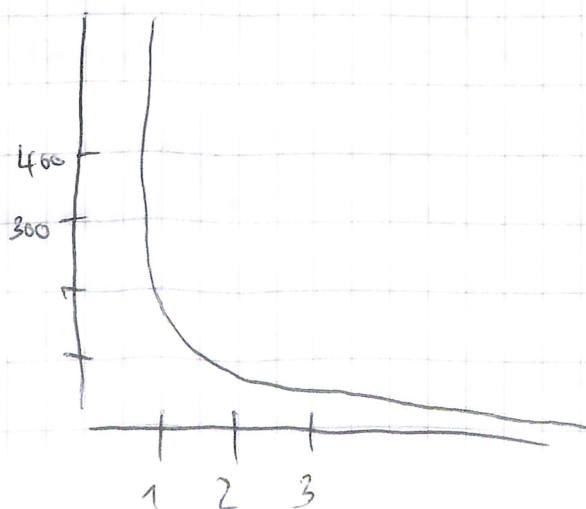
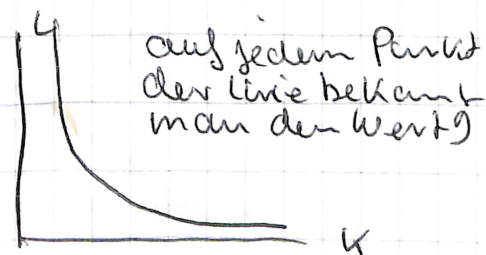
$$N_Q 12$$

$$L = \frac{81}{K^3}$$

$$\frac{dL}{dK} = -\frac{243}{K^4}, dL$$

$$< 0 \quad dL$$

$$\frac{d^2L}{dK^2} = \frac{972}{K^5} > 0$$



- Tangente dreht sich ins Positive
- Steigung wird größer

Klausur

Veränderung von ΔL u. ΔK

Eine Veränderung von ΔK lässt sich durch eine Veränderung von ΔL ausgleichen

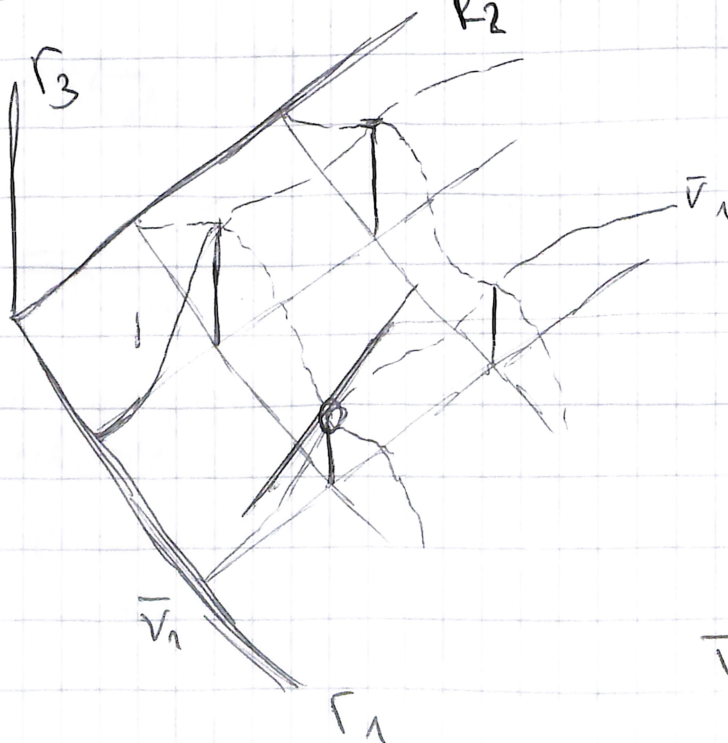
$$\left| \frac{\Delta L}{\Delta K} \right| \rightarrow \left| \frac{dL}{dK} \right|$$

Differentialquotient

Gesamrate der Substitution
des Faktors Arbeit / Kapital
= der Absoluten Steigung der
Isoquanten in dem Punkt
bei Bewegung von links
nach rechts ab

Schnitt Senkrecht zu den ~~Plan~~ Koordinaten-
achsen

$$\Gamma_3 = g(r_1, r_2) \quad (r_1, r_2 \geq 0) \quad \text{Faktoreinsatzmengen}$$



ableitung in dem
Punkt r_1 an der Stelle
 r_2

Durch den Schnitt
ergibt sich eine
Kurve

$$\bar{\Gamma}_1 = g(\bar{\Gamma}_1, r_2)$$

1. Ableitung positiv
2. Ableitungen nehmen die Ertragszuwächse zu

8.3. Partielle Ableitung

Def 8.3.1 Es sei $U(a) \subseteq Df \subseteq \mathbb{R}^n$. Falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{h}$$

Zuwachsstelle nur an einer Achse

existiert, heißt f an der Stelle a partiell nach x_i ($i = 1, \dots, n$) differenzierbar, der Grenzwert heißt partielle Ableitung von f nach x_i an der Stelle a .

Nach welcher Variablen soll abgeleitet werden

$$SW: \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_a = f_{x_i}(a_1, \dots, a_n)$$

Def 8.3.2 Eine Funktion f heißt genau dann auf $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ partiell nach x_i diff'bar, wenn f von jeder Stelle $x \in U$ partiell differenzierbar ist

$$Bsp: f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -3x_4 x_2 10^{2x_1^2 - x_3} \ln(x_2^4 + 6)$$

$$f_{x_1}(x_1, x_2, x_3, x_4) = -3x_4 x_2 10^{2x_1^2 - x_3} \ln 10 \cdot 4x_1$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2, x_3, x_4) = -3x_4 10^{2x_1^2 - x_3} \left[(\ln(x_2^4 + 6) + \frac{4x_2^4}{x_2^4 + 6}) \right]$$

$$f_{x_3} \quad \quad \quad \hat{=} \quad D(f) = \mathbb{R}^4 = D(f_{x_1}) = D(f_{x_2})$$

Klausur

Satz 8.3.3 Sind f und g an einer Stelle $a \in D(f) \cap D(g)$ partiell nach x_i diff'bar, so sind $f \pm g$ an a nach x_i partiell diff'bar und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f \pm g) \Big|_a = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_a \pm \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_a$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f \cdot g) \Big|_a = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_a \cdot g(a) + f(a) \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_a$$

Ist weiterhin $g(a) \neq 0$, so gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f}{g} \right) \Big|_a = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_a \cdot g(a) - \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_a f(a)}{g^2(a)}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{-\ln(x_1^2 + 1 + x_4^2) + x_3 e^{x_3}}{x_1^2 + x_3^2}$$

$$f_{x_3}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(1 e^{x_3} + e^{x_3} \cdot x_3) \cdot (x_1^2 + x_3^2) - 2x_3 (-\ln(x_1^2 + 1 + x_4^2) + x_3 e^{x_3})}{(x_1^2 + x_3^2)^2}$$

$$D(f) = \mathbb{R}^4 \setminus \left\{ (0, x_2, 0, x_4) \mid \begin{matrix} x_2, x_4 \\ \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = D(f_{x_3})$$

Kettenregel

Satz 8.3.4 Ist f mit $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ an $g(a)$ diff'bar und g mit $D(g) \subseteq \mathbb{R}^n$ an a partiell nach x_i diff'bar, so ist auch $f \circ g$ mit $f(g(x))$ an a partiell nach x_i diff'bar und es gilt:

~~1~~ $\rightarrow$

(2)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f \circ g) \Big|_a = f'(g(a)) \cdot g_{x_i}(a)$$

Def 8.3.5:

$$f_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} f_{x_i}$$

2. Ableit. / 1. Ableiten

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} f_{x_i}$$

$$f_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f_{x_j}$$

} gemischte Partielle
Ableitungen
2. Ordnung
($i \neq j$)

Bem! i. a. ~~symmetrisch~~

$$f_{x_i x_j} \neq f_{x_j x_i}$$

BSP: $f(x_1, x_2) = 3|x_1| + 2x_1^3 \sin x_2$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_0$ existiert nicht, also auch $f_{x_1 x_2}(0)$ nicht

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1^3 \cos x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1^2 \cos x_2$$

$$f_{x_2 x_1}(0,0) = 0$$

Satz 8.3.6 Wenn auf $M \subseteq D(f)$ die partielle Ableitungen $f_{x_1 x_2}$ und $f_{x_2 x_1}$ existieren und stetig sind, gilt: $f_{x_1 x_2} = f_{x_2 x_1}$

Def 8.3.7 (Höhere partielle Ableitungen):
z.B.

$$\begin{aligned} f_{x_1 x_2 x_2 x_3 x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} f_{x_1 x_2 x_2 x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} f_{x_1 x_2 x_3} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

4 Differenzierbarkeit und vollständiges Differential

Zusammenhang zw. partieller Diff.:barkeit und Stetigkeit

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{nicht stetig}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_2(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(0,0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2} - 0}{h} = 0 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{(0,0)}$$

Eine Funktion kann also partiell ableitbar sein und nicht stetig!