

1)

$$x_1 + x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 \\ 1 & -1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \end{pmatrix}$$

10. Vorlesung

1. Zeile $\cdot (-1)$
und mit 2.
Zeile add.
1. Term

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

 $x(-1) + 3 \cdot \text{2. Zeile}$
2. Term

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L = \emptyset$$

(da $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -1 \Rightarrow$ nicht erfüllbar
für x können alle möglichen Werte eingesetzt
werden!)

$$x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2$$

$$-x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -4$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Zeile $\cdot (-1)$
und mit 2.
bzw. 3. Zeile
add.

- 4. Zeile an 2. Stelle setzen:

- zur dritten Zeile addieren

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftarrow{x - \frac{2}{3}}$$

3. Zeile $\cdot (-2)$ und mit 2.
Zeile add.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 3+x_4 & -1-3x_4 & 0 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

x_4 ist beliebig

6-A: (1) Bei allen Schritten der Umformungen

(2) Entsteht im Verlauf der Umformungen eine Gleichung, in der alle Koeffizienten der Variablen 0 sind und bei der die rechte Seite von 0 verschieden ist, bricht das Verfahren ab. Die Lösungsmenge ist die leere Menge.

Existiert andererseits eine Gleichung, bei der alle Koeffizienten der Gleichung Null sind und die rechte Seite ebenfalls Null ist, kann diese Gleichung gestrichen werden.

(3) Nach (1) und (2) wird das Gleichungssystem Schritt für Schritt wie folgt umgeformt:

1. Im k -ten Schritt wird die Gleichung ab Nr. k eine Gleichung gebildet, in der die in diesen Gleichungen auftretenden Variablen mit dem niedrigsten Index der Koeffizienten 1 erhält.

$x_3 + x_7 + x_{11} \rightarrow$ niedrigster Index x_3

2. Unter Anwendung der Äquivalenzumformung Satz 4.1.5c werden dann mit dieser neuen k -ten Gleichung alle übrigen so umgeformt, dass die in diesem Schritt bearbeitete Variable dort den Koeffizienten 0 erhält.

(4) Dieses Verfahren ist spätestens nach n - Schritten beendet. Man erhält ein Gleichungssystem, in dem bei

gewissen Variablen genau der Koeffizient 1 und die übrigen Koeffizienten 0 sind, wobei diese Gl. mit diesen Variablen beginnen.

Trifft dies nicht für alle Variablen zu, so sind bei der Auflösung des Gl-Systems die übrigen frei wählbar.

2. Vektoren und lineare Abhängigkeit

Def. 4.2.1: Es sei $(V, +)$ eine kommutative Gruppe (neutrales Element u. inverses Element)

V heißt genau dann Vektorraum (linearer Raum) über $\mathbb{R}$, wenn eine Multiplikation der Elemente von V mit reellen Zahlen erklärt ist, die folgende Eigenschaften besitzt:

$$(V_1) \bigwedge_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} \bigwedge_{\vec{x} \in V} (\alpha + \beta) \vec{x} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{x}$$

$$(V_2) \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{R}} \bigwedge_{\vec{x}, \vec{y} \in V} \alpha (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \vec{x} + \alpha \vec{y}$$

$$(V_3) \bigwedge_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} \bigwedge_{\vec{x} \in V} \alpha (\beta \vec{x}) = (\alpha \beta) \vec{x}$$

$$(V_4) \bigwedge_{\vec{x} \in V} 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

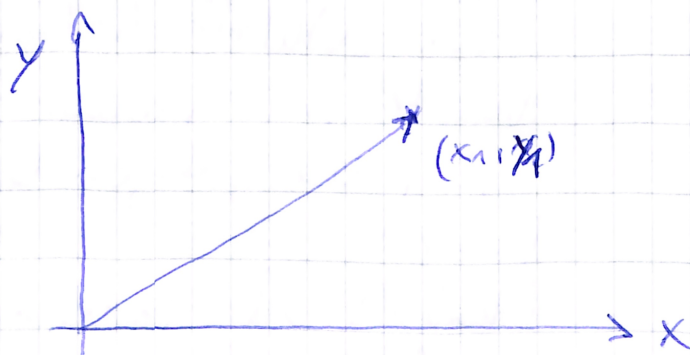
Bem: Die Elemente von V heißen Vektoren
 Die Elemente von R heißen Skalare.
 Die Multiplikation von V und R heißen
 innere Verknüpfung
 - Das neutrale Element heißt der Null-Vektor
 $(V, +, \cdot) \quad \vec{0}$

BSP: 1 $\{f \mid f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$

(innere Verknüpfung)

äußere Verkn. $\exists f$

2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$
 (x_1, y_1)



Addition = Innere Verknüpfung

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Multiplikation

$$\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & -5 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

~~Lösung~~

Aus 3. Zeile folgt $x_3 = 0$
 $x_4 = \text{frei} \in \mathbb{R}$

2. Zeile $0 \cdot x_1 + 1x_2 + \overset{-5(0)}{0} + 3x_4 = -1$

$$\underline{x_2 = -1 - 3x_4}$$

1. Zeile $1x_1 + 1(-1 - 3x_4) - 1(0) + 2x_4 = 2$
 $1x_1 - 1 - 3x_4 + 2x_4 = 2$

$$\underline{x_1 = 3 + x_4}$$

$$\mathbb{L} \left\{ (3 + x_4, -1 - 3x_4, 0, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$