

①

11. Vorlesung

Lineare Algebra

$$V \vec{x} = (x_1, \dots, x_2)$$

$$LK \vec{0} \quad n=2$$

$$1\lambda_1 + 0\lambda_2 = 0$$

$$x_1(1,0) + x_2(0,1) = (0,0) \Leftrightarrow 0\lambda_1 + 1\lambda_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Def. 4.2.3. Die Vektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ heißen linear abhängig genau dann, wenn es eine Darstellung des Nullvektors als Linearkombination gibt, so dass gilt:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0} \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 > 0.$$

(linearabhängig bedeutet: nicht linear)

Bsp.

(1,2)

(2,3)

(3,4)

Sind diese Vektoren linear abhängig od. linear unabhängig

→

Homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} \lambda_1(1,2) \quad \lambda_2(2,3) \quad \lambda_3(3,4) = (0,0) \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{array}$$

z.B. $\lambda_2 = -2; \lambda_3 = 1$
 $= \lambda_1$

Die Vektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ heißen genau dann linear unabhängig, wenn sie nicht linear abhängig sind, d.h. wenn für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 = 0$$

Satz 4.2.4 Enthält eine Menge von Vektoren den Nullvektor, so sind die Vektoren linear abhängig.

Beweis: $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p$ mit $\vec{x}_l = \vec{0}$
 $(1 \leq l \leq p)$

Frage: trivial oder nicht trivial

$$\lambda_l \vec{x}_l + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^p \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}$$

falls der Koeffizient 0 gesetzt wird ist die Kombination trivial!
 trivial = alle null!

für $\lambda_i = 0$ somit ist in der Summe null!

Satz 4.2.5: Sind p Vektoren ($p > 1$) linear abhängig, so ist mindestens einer von ihnen eine Linearkombination der übrigen. Ist umgekehrt einer der p -Vektoren eine Linearkombination der übrigen, so sind die Vektoren linear abhängig.

ohne Beweis, aber Allgemeinheit

Beweis: a) $\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}$ o.d.B.A. $\lambda_1 \neq 0$

nicht trivial $\Rightarrow$ einen Koeffizienten der von null verschieden ist

$$\vec{x}_1 = - \sum_{i=2}^p \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \vec{x}_i$$

b) ~~trivial~~ o.B.d.A.

$$\vec{x}_1 = \sum_{i=2}^1 \lambda_i \vec{x}_i$$

mindestens ein Vektor muss $\neq 0$ sein

$$\Rightarrow (-1) \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^p \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}$$

d.h. linear abhängig
wegen $\lambda_1 = -1 \neq 0$

Def 4.2.6: Die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraums heisst die Dimension dieses Vektorraums

BSP: ^{Dimension} ~~dim~~ $\mathbb{R}^n = n$

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots$$

$$\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

n - linear unabhängige Vektoren

Basis 4.2.7: Ist V ein Vektorraum mit der Dimension $\dim V = n$, so heissen je n linear unabhängige Vektoren eine Basis von V .

BSP : $\mathbb{R}^4$ $\left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0) (0, 1, 0, 0) \\ (0, 0, 1, 0) (0, 0, 0, 1) \end{array} \right\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1, 2, 3, 0) (0, 1, 2, 3) \\ (3, 0, 1, 2) (2, 3, 0, 1) \end{array} \right\}$$

linear unabhängig, also
sind sie eine Basis

(2)

Satz 4.2.8: Jeder Vektor eines Vektorraumes ist eindeutig darstellbar als Linearkombination der Basisvektoren einer Basis

Bew: Sei $\vec{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$ und

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{x}_i \quad (\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \vec{0} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \vec{x}_i \quad \xRightarrow{\vec{x}_i \in \text{BV}}$$

$$\bigwedge_i \alpha_i - \beta_i = 0 \quad \text{d.h.}$$

$$\bigwedge_i \alpha_i = \beta_i$$

Bsp:

$$(4, 4, 0, -8) = 4(1, 0, 0, 0) + 4(0, 1, 0, 0) + 0(0, 0, 1, 0) + 0(0, 0, 0, 1)$$

$$(4, 4, 0, -8) = 2(1, 2, 3, 0) + (-3)(0, 1, 2, 3) + 0(3, 0, 1, 2) + 1(2, 3, 0, 1)$$

4.3. Matrizen

Def 4.3.1: Ein nach m Zeilen und n Spalten geordnetes Schema $A(m,n)$ von Zahlen der Form

$$A(m,n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt Matrix vom Typ (m,n) .

Eine Matrix vom Typ $(1,n)$ heißt n -stelliger Zeilenvektor. Von Typ $(m,1)$ heißt m -stelliger Spaltenvektor, vom Typ (n,n) heißt n -reihige quadratische Matrix

$$(a_{ik})_{(m,n)}$$

Def 4.3.2 $A(m,n) = B(r,s) : \Leftrightarrow m=r, n=s$

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq m} \bigwedge_{1 \leq k \leq n} a_{ik} = b_{ik}$$

Satz 4.3.3: Die Matrizen vom Typ (m,n) bilden mit $(a_{ik})_{(m,n)} + (b_{ik})_{(m,n)} := (a_{ik} + b_{ik})_{(m,n)}$
 $\Rightarrow$ innere Verknüpfung

$$\lambda (a_{ik})_{(m,n)} := (\lambda a_{ik})_{(m,n)}$$

$\rightarrow$ Vektorraum

Bew: Böhme 1. Band

Def 4.3.4: Eine Matrix $B_{(n,m)} = (A_{(m,n)})^t$ heißt genau die zu $A_{(m,n)}$ transponierte Matrix, wenn gilt:

$$\bigwedge_{i,k} a_{ik} = a'_{ki}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

A' oder A^T

Def 4.3.5: Eine Matrix A heißt genau dann symmetrisch, wenn gilt:
 $A = A'$

Bem: Sym $\Rightarrow$ quadr.

Satz: 4.3.6 $(A')' = A$, $(A+B)' = A' + B'$,
 $(\alpha A)' = \alpha A'$

BSP Ein Betrieb stellt aus Rohstoffen H_1, H_2, H_3, H_4 Halbprodukte her.
 $\rightarrow$ Sie verwenden Rohstoffe R_1, R_2, R_3

	H_1	H_2	H_3	H_4		E_1	E_2
R_1	2	0	6	2	H_1	0	1
R_2	1	3	1	0	H_2	2	0
R_3	2	5	3	1	H_3	6	3
					H_4	1	4

Es werden die Rohstoffe gesucht!

	E_1	E_2
R_1		
R_2	12	
R_3		15

$$E_1 R_2 = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 1$$

$$E_2 R_3 = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4$$

3. Dreidimensionaler Vektor
n-Dimensionaler Vektor $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n \quad \vec{x}$$

Def 4.2.2: Unter einer Linearkombination der Vektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ versteht man ~~denen~~ Vektor $\vec{x}$ mit $\vec{x} := \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{x}_i \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{x}_i$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

trivial