

①

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & -7 & 5 & 0 & 12 \\ 4 & -2 & 3 & -1 & 7 \\ 10 & -12 & 7 & 1 & 23 \end{array} \right)$$

Summe aller Zeilenelemente bilden die Prüfzeile

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 3 & -5 & 2 & 1 & 5 & +6 \\ 7 & -7 & 5 & 0 & 12 & 17 \\ 4 & -2 & 3 & -1 & 7 & 11 \\ 10 & -12 & 7 & 1 & 23 & 29 \end{array} \right)$$

1. Zeile $\times (-1)$ und mit 3. Zeile add.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -28 & -2 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

1. Zeile $\cdot (-7)$ und mit
2. Add.

$$L = \left\{ \left(x_1, x_2, \frac{12}{5} - \frac{7}{5}x_1 + \frac{7}{5}x_2, \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{11}{5}x_2 \right) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Addition von Matrizen ✓

Skalarmultiplikation von Matrizen ✓

Def 4.3.7 : Unter dem Produkt AB einer (m, n) Matrix $A = (a_{ik})$ mit einer (n, p) Matrix $B = (b_{ik})$ versteht man diejenige (m, p) Matrix $C = (c_{ik})$, für die gilt:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad \left(\begin{array}{l} i=1, \dots, m \\ k=1, \dots, p \end{array} \right).$$

Bem:

Die Anzahl der Zeilen^{element} der Matrix müssen der Anzahl der Spalten^{element} der 2. Matrix sein

besser:
Anzahl der Spalten
der 1. Matrix =
Anzahl d. Zeilen
d. 2. Matrix

Beispiel:

$$c_{11} = \sum_{j=1}^{4 \text{ - Zeilen}} a_{1j} b_{j1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} 1. \text{ Spalte} & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \quad || \quad 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 2. \text{ Spalte} & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{array}$$

! Zeilen auf Spalten legen !

Nullmatrix

BSP:

Spalte



Nullfäßer

4	-2	2
2	0	5
4	-1	6

Zeile →

1	2	-2	0	0	0
-2	-4	4	0	0	0

(2,3) - Nullmatrix

- 1. Zeile x 1. Spalte
- 2. Zeile x 2. Spalte

Bem: Es kann eine Nullmatrix herauskommen ohne dass einer der Faktoren eine Nullmatrix ist.

Kontrollspalte
↓

			2	-2	-4	-4
			-1	3	4	6
			1	-2	-3	-4
2	-2	4	2	-2	-4	-4
-1	3	4	-1	3	4	6
1	-2	-3	1	-2	-3	-4

⇒ Die Kontrollspalte ist die Summe der Zeilelemente

1. Zeile $\times$ 1. Spalte $\rightarrow$ Ergebnisse addieren (2)
 $-n-$ $\times$ 2. $-n-$ (-2)
 $-n-$ $\times$ 3. $-n-$ (-4)

$\rightarrow$ Das Produkt zweier gleicher Matrizen gibt sind gleich den Faktoren.

~~APPROXIMIERUNG~~

$$\rightarrow a^2 = a$$

②

Eine Matrix D der Ordnung n wird als Diagonalmatrix bezeichnet, wenn die Koeffizienten außerhalb der Hauptdiagonale gleich null sind. $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$

Def 4.2.8

: Eine quadratische Matrix $D_n = (d_{ik})$ heißt genau dann Diagonalmatrix, wenn gilt:

$$\bigwedge_{1 \leq i, k \leq n} i \neq k \Rightarrow d_{ik} = 0$$

Bsp:

N

Def 4.3.9

: Eine quadratische Matrix $E_n = (e_{ik})_n$ heißt genau dann n -reihige Einheitsmatrix, wenn gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bigwedge_{1 \leq i, k \leq n} e_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

Neutrales Element bez. der Multiplikation

alle 1 liegen auf der Hauptdiagonalen sonst 0!

Satz 4.3.10

: $A_{(m,n)} E_n = A_{(m,n)}$, $E_m A_{(m,n)} = A_{(m,n)}$

Beweis : $(a_{ik})_{(m,n)} (e_{ik})_{(n,m)} = \left(\sum_{j=n}^n a_{ij} e_{jk} \right)_{(m,n)}$

$$= (a_{ik} e_{kk})_{(m,n)} = (a_{ik})_{(m,n)}$$

Satz 4.3.11: Die Matrixmultiplikation ist eine assoziative Verknüpfung

$$a \cdot b \cdot c$$

$$(a \cdot b) \cdot c$$

$$a \cdot (b \cdot c)$$

Beweis : Böhme 1. Band

Fals.

: Die n -Reihige quadr. Matrizen bilden bezüglich der Matrixmultiplikation eine Halbgruppe mit neutralem Element.

Sie bilden keine Gruppe.

Bem: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X_{(2,2)} = E_2$

Def 4.3.12: Eine Matrix $A_{(n,n)}^{-1}$ heißt Inverse zu einer Matrix $A_{(n,n)}$ genau dann wenn gilt:

~~$A^{-1} \neq \frac{1}{A}$~~

denn eine Matrix-division gibt es nicht!

$$A_{(n,n)} A_{(n,n)}^{-1} = A_{(n,n)}^{-1} A_{(n,n)} = E_n$$

Bem: Falls es eine Inverse gibt, ist sie eindeutig.

Def 4.3.13: Eine ^(quadr.) Matrix heißt genau dann regulär, wenn sie eine Inverse besitzt.

Satz 4.3.13: Sind A und B reguläre Matrizen vom Typ (n,n) , so auch AB und BA und es gilt:
 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ und $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
 inverse zur Klammer

Die Inverse eines Produkts ist
 gleich ~~dem Produkt~~ das Produkt
 indem ich die Inverse des 2.
 Faktors nehme und den mit Inverse
 des 1. Faktors multipliziere

Beweis: $(AB) (B^{-1} A^{-1}) = A (B B^{-1}) A^{-1}$
 $= (A E) A^{-1} = A A^{-1} = E_n$

Bem. Falls eine Inverse existiert
 ist sie eindeutig

Satz 4.3.15: Die regulären Matrizen vom
 Typ (n, n) bilden bezüglich der
 Matrizenmultiplikation eine
 Gruppe.

Beweis: $\text{asso. V.}, E_n, A^{-1}$

$$A A^{-1} = E$$

Def 4.3.16: Elementare Umformungen einer
 Matrix sind Multiplikation einer
 Zeile (Spalte) mit einer von Null
 verschiedenen Zahl.

③

Vertauschen zweier Zeilen (Spalten)
Ersetzen einer Zeile (Spalte) durch
ihre Summe mit einer anderen Zeile
oder (Spalte).

Satz 4.3.17: Eine Matrix $A_{(n,n)}$ ist genau dann
regulär, wenn sich die Matrix
 $(A_{(n,n)} | E_n)_{(n,2n)}$

durch elementare Zeilenumformungen
auf die Form $(E_n | X_{(n,n)})_{(n,2n)}$
bringen läßt.

Es gilt dann $X_{(n,n)} = A^{-1}_{(n,n)}$

Bsp:
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 13 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

2. Zeile zur ersten addieren
Ergebnis $\times 2$ und mit 2. Zeile add

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{array} \right)$$

Inverse zur Ausgangsmatrix