

①

## 13. Vorlesung

Matrizen Invertieren (Matrix muss quadratisch sein)

$$(A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Inverse Matrix

$$(A B)^T = B^T A^T$$

Transponieren T od. I

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

⋮

⋮

⋮

 $\Leftrightarrow$ 

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A

 $\vec{x}$  $= \vec{b}$ 

Koeffizientenmatrix • Vektor

= Vektor



- Allgem. Zusammenhang von Matrizen mit lin. Abhängigkeit (Unabhängigkeit) von Vektoren.
- Matrizen: lineare Gleichungssysteme

Satz 4.3.18: Es sei  $A$  eine Matrix vom Typ  $(n, n)$  also quadratisch. Das lineare Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  ist genau dann eindeutig lösbar, wenn  $A$  regulär ist.

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{a) } A^{-1} \text{ existiert} &\Rightarrow A\vec{x} = \vec{b} \quad | \cdot A^{-1} \\ &A^{-1}A\vec{x} = \vec{b}A^{-1} \\ &\Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b} \end{aligned}$$

b) falls  $A$  nicht regulär ist, entsteht bei der Durchführung des Gaußschen Algorithmus eine Nullzeile bei  $A$

Satz 4.3.19: Eine quadratische Matrix ist genau dann regulär wenn ihre Zeilen<sup>(Spalten)</sup> linear unabhängig sind.

Bew.:

$$A \text{ nicht regulär} \Leftrightarrow (A | E) \rightarrow (E | X)$$

$\Leftrightarrow$  bei elementaren Zeilenumformungen ergibt sich eine Nullzeile



②

$\Rightarrow$  Zeilen linear abhängig  
4.2.4 (bei der Nullzeile)

Def: 4.3.20: Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren einer Matrix heißt Rang der Matrix.

Bem. 1.

Eine Matrix besteht aus Spaltenvektoren und Zeilenvektoren.

Man kann beweisen dass Spaltenrang = Zeilenrang ist.

2.

Der Rang von einer Matrix ist  
 $\leq \min(m, n)$

Bsp:

3, 17, 1, Rang 12  $\rightarrow$  falsch  
Rang kann maximal 3 sein  
0, 1, 2, 3

Wie bestimmt man den Rang einer Matrix?

— Der Rangbestimmung einer Matrix bestimmt man diese mit Hilfe der Elementarmatrixumformungen und diese sind Ranginvariant

#



$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1r} & * & \dots & * \\ 0 & C_{22} & & & & & \\ 0 & & C_{33} & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & C_{rr} & \dots & * \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & 0 & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_i \neq 0 \quad (1 \leq i \leq r)$$

Unter der Hauptdiagonale Null  
über  $n$  ~~terger~~ unbestimmte  
Werte

$$\Rightarrow \text{Zeilrang} = \text{Spaltenrang}$$

Der Rang einer Matrix ist eine Zahl

BSP  $\text{rg(Rang)} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 & 0 \\ -8 & -2 & 3 & -1 \\ 20 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -1 \\ 0 & 0 & -42 & 2 \end{pmatrix}$  zu 2. Zeile 1. Zeile  
3. Zeile  $\cdot (-5)^+$  2. und 3. Zeile  $\cdot (-5)^+$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 21 \\ 6 & 2 & 0 & -42 \end{pmatrix}$$

4. ~~Zile~~ mit 2. Zile gefasst  
Spalt

2. Zeil  $\times 2$  und mit 3. Zeile add



3

$$= \text{rg} \left( \begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = 2 \quad (2. \text{ Zeile } 2. \text{ Spalte})$$

- letzte Zeile muss null sein!  
darüber ablesen welche Zeile / Spalte!

Bsp: 4321: Ein LSG der Form  $A\vec{x} = \vec{b}$   
heißt homogen falls  $\vec{b} = \vec{0}$  sonst  
inhomogen

$\Rightarrow$  Von der Koeffiz. Matrix ein  
Teil  $\neq 0$  inhomogen

Satz 4.3.22 Die Lösungsmenge eines lin. homogenen  
Gleichungssystems in  $n$  Variablen  
bildet einen Vektorraum der  
Dimension  $n-r$ , wobei  $r$  der  
Rang der Koeffizientenmatrix ist.

Bew:

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L \Rightarrow A\vec{x}_1 = \vec{0} \wedge A\vec{x}_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow A\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in L \quad \vec{0} \in L \quad \text{assoziativ, kommutativ}$$

$$\vec{x}_1 \in L \Rightarrow -\vec{x}_1 \in L$$

$$(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n = 0)$$



Vektoraddition ist assoziativ u. kommutativ

Folgerung: 1)  $\text{rg } A = n$  nur triviale Lösungen

2)  $m < n \Rightarrow$  nicht triviale Lösungen

Bsp: homogene Gleichungssystem  $L$  lin. abh.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 & 0 \\ -8 & -2 & 3 & -1 \\ 20 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{--- wird weggelassen} \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -1 \\ 0 & 0 & -42 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{wird weggelassen}$$

$$L = \left\{ -\frac{x_2}{4} - \frac{3}{28}x_4, x_2, \frac{x_4}{21}, x_4 \right\}$$

$$x_2, x_4 \in \mathbb{R}$$



(f)

Lösungssysteme  
Die Lösung eines inhomogenen GS bildet  
keinen Vektorraum

Wenn  $x_1 \in E$  ist, folgt nicht,  
dass  $-x_1 \in E$  ist (kann auch  
unlösbar sein)

Satz 4.3.2.3: Ein LGS  $A\vec{x} = \vec{b}$  ist genau  
dann lösbar, wenn gilt: der  
Rang von  $A$  und der Rang  $A|\vec{b}$   
müssen gleich sein!

$$\text{rg } A = \text{rg } (A|\vec{b}).$$

Jede Lösung von  $A\vec{x} = \vec{b}$  hat die  
Gestalt

$\vec{x} = \vec{x}_* + \vec{x}_h$ , wobei  $\vec{x}_*$  eine  
spezielle Lösung des linearen  
inhomogenen Systems ist und  
 $\vec{x}_h$  die allg. Lösung des  
linearen homogenen GS ist.

BSP:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 9 & 0 \\ -8 & -2 & 3 & -1 \\ 20 & 5 & 3 & 2 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

Inhomogen



$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

nicht für die letzte Zeile will einsetzen

$$L = \left\{ \left( x_1, -4x_1 + \frac{3}{7}, -\frac{1}{21} \right) \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{allgen. Lösungsmenge} = \left\{ \left( x_1, -4x_1, 0 \right) + \left( 0, \frac{3}{7}, -\frac{1}{21} \right) \mid \right\}$$

## 4.4 Determinanten

Def 4.4.1 : Jeder  $n$ -reihigen quadrat. Matrix  $A$  wird gem. folgender Vorschrift eine reellen Zahl zugeordnet, die man ihre Determinante nennt ( $\det A$ ,  $|A|$ ) nennt:

$$n=1: (a_{11}) \rightarrow \det(a_{11}) := a_{11}$$

$$n \geq 2: A_{(n,n)} \rightarrow |A_{(n,n)}| = \det A_{(n,n)} \\ \det A_{(n,n)} = \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i} \det A_{1i}$$

Dabei entsteht die  $(n-1, n-1)$ -Matrix  $A_{1i}$  aus der Matrix  $A$ , indem man die  $j$ -te Zeile und die  $k$ -te Spalte streicht.

~~also~~



5

Satz 4.2.2 Für die Determinante einer zwei-  
reihigen Matrix  $A(2,2)$  gilt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

Die Determinante einer 3-reihigen  
quadr. Matrix  $A(3,3)$  läßt sich auch  
errechnen durch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} -$$

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{31} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \end{array}$$

$$= (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}) -$$

$$(a_{31} a_{22} a_{13} + a_{32} a_{23} a_{11} + a_{33} a_{21} a_{12})$$