

①

14. Vorlesung
6.12.

Determinanten

$$\text{Beweis: } |A_{(2,2)}| = \det A_{(2,2)} = \sum_{i=1}^2 (-1)^{1+i} a_{1i} \det A_{1i}$$

$$= (-1)^2 a_{11} \det A_{11} + (-1)^3 a_{12} \det A_{12}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$|A_{(3,3)}| = \det A_{33} = \sum_{i=1}^3 (-1)^{1+i} a_{1i} \det A_{1i}$$

$$= \underline{a_{11}} \det A_{11} - \underline{a_{12}} \det A_{12} + \underline{a_{13}} \det A_{13}$$

$$= a_{11}(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12}(a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) + a_{13}$$

Satz 4.43 (Entwicklungssatz von Laplace): Es gilt
 $\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$ (Entw. nach
 der i -ten Zeile)

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} \text{ (Entw.}$$

nach der k -ten Spalte)

Vorzeichen der kleinen Determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der 2. Spalte

$$+ \begin{vmatrix} 2^+ & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ \hline 2^+ & 0 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

A_{33} A_{43}

Es wird weiter aufgelöst

$$|A_{13}| = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2(-4) + 2 = -6$$

$$|A_{33}| = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2(3+2) = 10$$

$$|A_{43}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 6 - 1 - (-4 - 2 + 6) = -3$$

$$12 + 40 + 3 = \underline{\underline{55}}$$

Hauptdiagonale - Nebendiagonale

Satz 4.4.3 (Rechenregeln):

$$\det A = \det A'$$

Wird in einer Matrix eine Zeile (Spalte) mit einer Zahl c multipliziert, dann multipliziert sich auch die entsprechende Determinante mit c . Vertauscht man in einer Matrix zwei Zeilen (Spalten) so ändert sich die zugehörige Determinante ohne Vorzeichen.

a) benachbart z:

$$(-1)^{i+k \pm 1} \text{ statt } (-1)^{i+k}$$

b)

$$\begin{array}{c} i \\ | \\ | \\ | \\ i+r \end{array}$$

x

nach r Schritten

0

0
x

r-Schritte

r-1 Schritte

0

x

$$r + (r-1) = 2r-1 \quad \text{Vorzeichenwechsel}$$

Vertauscht man zwei Zeilen so ändert sich das Vorzeichen!

Stimmen in einer Matrix zwei Zeilen (Spalten) überein, so ist der Wert ihrer Determinante null.

- $\det A = -\det A \Rightarrow \underline{\det A = 0}$
- Addiert man zu einer Zeile (Spalte) ein Vielfaches einer anderen Zeile (u), so ändert sich die Determinante nicht.
- $\det AB = \det A \cdot \det B = \det BA$
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Wenn $\det A = 0$ dann ~~ist~~ existiert keine Inverse zu dieser Determinante

Satz 4.4.4: Eine Matrix A ist genau dann regulär wenn gilt $\det A \neq 0$

Beweis: A regulär $\Leftrightarrow A \xrightarrow{RR} E$,

$$\det E = 1$$

②

Satz 4.4.5: Ein lineares Gleichungssystem

$A_{(n,n)} \vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann
eindeutig lösbar, wenn gilt:
 $\det A \neq 0$.

Bew.: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ _{4.4.4} A regulär $\Leftrightarrow$ _{4.3, 18} eindeutige Lösung

Beispiel:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 &= a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 &= -a_{12}b_2 \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{cBdA} \\ a_{22} \neq 0 \\ a_{12} \neq 0 \end{matrix}$$

falls $a_{22} = 0$ darf man nicht mit a_{22}, a_{12}
multiplizieren determinant. Zähler determin. Zähler

$$\begin{aligned} x_1 (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) &= a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{1}{|A|} \end{aligned}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|A_1|}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|A_2|}{|A|}$$

Satz 4.4.6.: (Cramersche Regel):

Das lin. Gleichungssystem $A \vec{x} = \vec{b}$ mit

n -reihiger quadratischer Koeffizientenmatrix A besitzt genau dann eine eindeutig bestimmte Lösung $\vec{x}$, wenn $|A| \neq 0$. Es ist

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ \vdots \\ \frac{|A_n|}{|A|} \end{pmatrix}$$

wobei man A_k durch Ersetzen der k -ten Spalte von A durch $\vec{b}$ erhält.

→ n -Unbekannte

Bew.: B | Künzi

Bem:

1. $\vec{b} = \vec{0}$ (wenn in der det. eine Spalte $k=0$ ist)
2. $|A| = 0$ (System ist unlösbar, oder es gibt mehrere Lösungen)
↳ Gaußscher Algorithmus

BSP: Übungsaufgabe

$$A \vec{x} = \vec{b}$$

homogene System	$\vec{b} = \vec{0}$	$r = \text{rg } A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$	nur triviale Lösungen
		$r = \text{rg } A < n \Leftrightarrow \det A = 0$	Lsg mit $n-r$ Parameter
nicht homogene System	$\vec{b} \neq \vec{0}$	$r \neq \text{rg } A \quad \text{rg}(A \vec{b})$	Keine Lösung
		$r = \text{rg } A = \text{rg}(A \vec{b}) = n$	gerade eine Lsg.
		$r = \text{rg } A = \text{rg}(A \vec{b}) < n$	Lsg mit $n-r$ Parametern

4.5. Lineare Ungleichungssysteme

Def: 4.5.1. Eine lineare Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i > b \text{ oder } \sum_{i=1}^n a_i x_i < b$$
$$\geq \qquad \qquad \qquad \leq$$

$$(a_i, b \in \mathbb{R})$$

ist eine Aussageform in den Variablen $x_1, \dots, x_n$.

Bem:

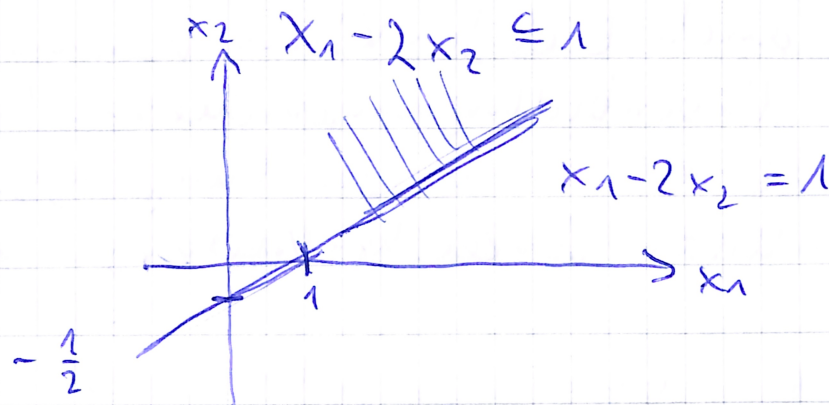
$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$$

$n = 2$ (Gerade in der Ebene)
 $n = 3$ Ebene

$n \geq 3$ Hyperebene
Zerlegt $\mathbb{R}^n$
in zwei Halbräume

(Erfüllungen der lin. Ungleichung und ihr Element)

Bsp:



Die gesamte Ebene wird in zwei Halbebenen geteilt

Def: 4.5.2 Ein lin Ungleichungssystem in n -Variablen ist eine AF in diesen Variablen, die aus konjunktiv verknüpften lin Ungleichungen besteht.

Bem.: 1. $A \vec{x} \leq \vec{b}$ Komponentenweise

2. Erfüllungsmenge eines lin Ungleichungssystems ist der Durchschnitt der Erfüllungs Mengen der einzelnen Ungleichungen.

③

Lineare Optimierung

LO: Gesucht wird das Max oder Min einer lin. Funktion die man auch Ziel Funktion nennt unter Nebenbedingungen die die Gestalt eines lin. Ungleichungssystems haben unter Vorzeichenbedingungen

Bsp: Eine Möbelfabrik hat noch Kapazitäten

- Sägemaschine 225 Einheiten
- für ein Tisch werden 5 Einheiten benötigt
- für einen Sessel werden 9 Einheiten ben.
- Polstermaschine hat freie Kapazität von 400 ZE
- für Tisch 0
- für Sessel 20 ZE für PM

diese FA produziert auf Lager

- Lager ^{heißt} Kapazität von 300 ME

Tisch nimmt 10 ME in Anspr.

Sessel 3 ME

Am Tisch 50 GE
Sessel 60 GE ein Leben erzielt
werden

Was muss Fa. Prod. um Kapazität
auszulasten und Max. Gewinn
zu erzielen?