

①

$$f(x, y) = 2x - \frac{x^2}{4} + y - \frac{y^2}{4}$$

$$D_1(f) = \mathbb{R}^2 \quad \text{da } 14.02.00$$

absolutes Extrema

Quadratische Ergänzung

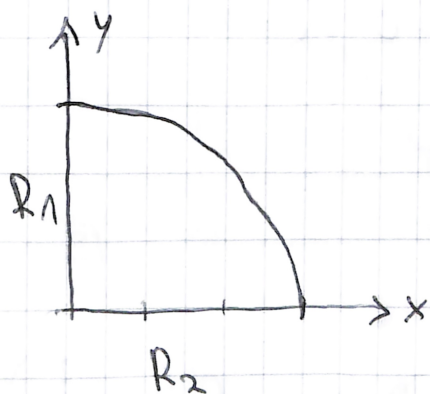
$$= - \left(\frac{x^2}{4} - 2x + 4 \right) - \left(\frac{y^2}{4} - y + 1 \right) + 4 + 1$$

$$= - \left(\frac{x}{2} - 2 \right)^2 - \left(\frac{y}{2} - 1 \right)^2 + 5 \quad \boxed{\text{abs. Max } (4, 2) = 5}$$

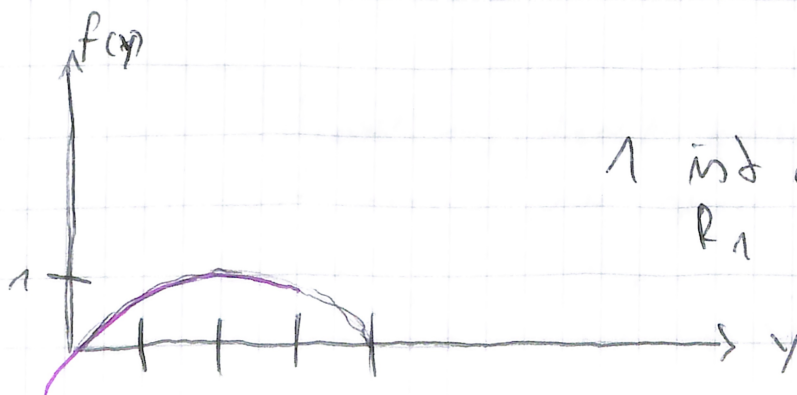
da negativ

• $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x - \frac{x^2}{4} \right) = -\infty$ Kein abs. Min

$$D_2(f) = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 9 \wedge 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 3 \}$$



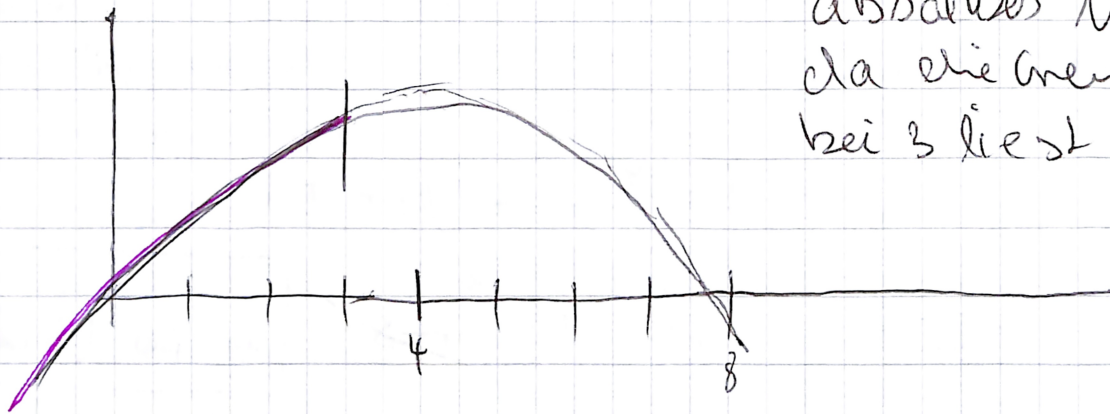
• R_1 Punkt auf dem Rand $f(0, y) = y - \frac{y^2}{4} = - \left(\frac{y}{2} - 1 \right)^2 + 1$



1 ist das abs. Max auf R_1

1. Ableitung nach x
und $y = 0$

$$R_2: f(x, 0) = -\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 + 4$$



absolutes Max
da die Grenze
bei 3 liegt

$$\begin{aligned} R_3: g(x) = f(x, \sqrt{9-x^2}) &= 2x - \frac{x^2}{4} + \sqrt{9-x^2} - \frac{9}{4} + \frac{x^2}{4} \\ &= -2x - \frac{9}{4} + \sqrt{9-x^2} \end{aligned}$$

$$g'(x) = -2 - \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$2 = \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} \quad x = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} g''\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) &< 0 \quad g\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) = f\left(\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \\ &= 4.5 \end{aligned}$$

Eine stetige Funktion besitzt immer ein
absolutes Max auf einem Kompaktum!

$$\max \{f(x, y) \mid \mathcal{F}(x, y) = 0\}$$

$$x = g(y)$$

$$y = h(x)$$

BSP.: 1: $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

NB: $4x^2 + 12y = 4$
 $\Leftrightarrow x^2 = 1 - 3y \geq 0$

einsetzen

$\sim$

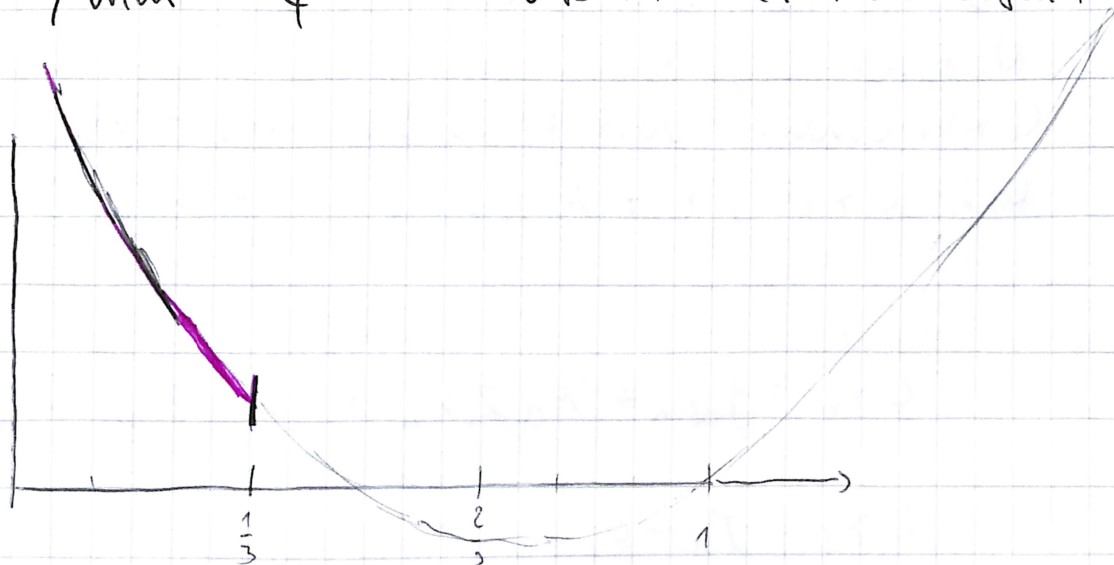
$$f(x, y) = 1 - 3y + 2y^2$$

$$D(\tilde{f}) = \{y \mid y \leq \frac{1}{3}\}$$

$$= 2\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

$$y_{\min} = \frac{3}{4}$$

NB ist hier nicht erfüllt



$$y_{\min} = \frac{1}{3} \quad x_{\min} = 0$$

$$f\left(0, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= x^2 + \frac{2}{9} - \frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{9}x^4 \\ &= \frac{2}{9} + \frac{5}{9}x^2 + \frac{2}{9}x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}(1-x^2) \\ y^2 &= \frac{1}{9}(1-2x^2+x^4) \end{aligned}$$

abs. Min $x=0 \quad y = \frac{1}{3}$

Regel 8.54 (Lagrange): Gegeben sei eine Funktion f mit $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$; f besitze partielle Ableitungen 2. Ordnung. Gesucht werden die Extrema von f unter den Nebenbedingungen $J_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, J_m(x_1, \dots, x_n) = 0$ ($m < n$). Man bilde die Lagrange Funktion

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 J_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m J_m(x_1, \dots, x_n)$$

Die λ_i heißen Lagrangesche Multiplikatoren. Notwendige Bedingung für ein relatives Extremum von f unter den Nebenbedingungen ist $L_{x_1} = f_{x_1} + \lambda_1 J_{1x_1} + \dots + \lambda_m J_{mx_1} = 0$

$\vdots$

$$L_{x_n} = f_{x_n} + \lambda_1 J_{1x_n} + \dots + \lambda_m J_{mx_n} = 0$$

$$L_{\lambda_1} = J_1 = 0$$

$$L_{\lambda_m} = J_m = 0$$

BSP: 1:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(4x^2 + 12y - 4)$$

$$L_x(x, y, \lambda) = 2x + 8x\lambda = 0$$

$$L_y(x, y, \lambda) = 4y + 12\lambda = 0$$

$$L_\lambda(x, y, \lambda) = 4x^2 + 12y - 4 = 0$$

BSP 2:

(7)

$$f(x, y) = 4x + 12y$$

$$f(x, y) = x^2 + 12y^2 - 22 = 0$$

$$L(x, y, \lambda) = 4x + 12y + \lambda (x^2 + 12y^2 - 22)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4 + 2\lambda x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{2}{\lambda}$$

$\lambda = 0$ unmöglich

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 12 + 24\lambda y = 0 \quad y = -\frac{3}{\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 12y^2 - 22 = 0 \quad \frac{4}{\lambda^2} + \frac{2 \cdot 9}{\lambda^2} = 22$$

$$\lambda = \pm 1$$

$$(-2, -3, 1)$$

$$(2, 3, -1)$$

$$f(-2, -3) = -44$$

$$f(2, 3) = +44$$

relative min

rel. max

Niveau
wächst

$\nearrow N$

(2, 3)

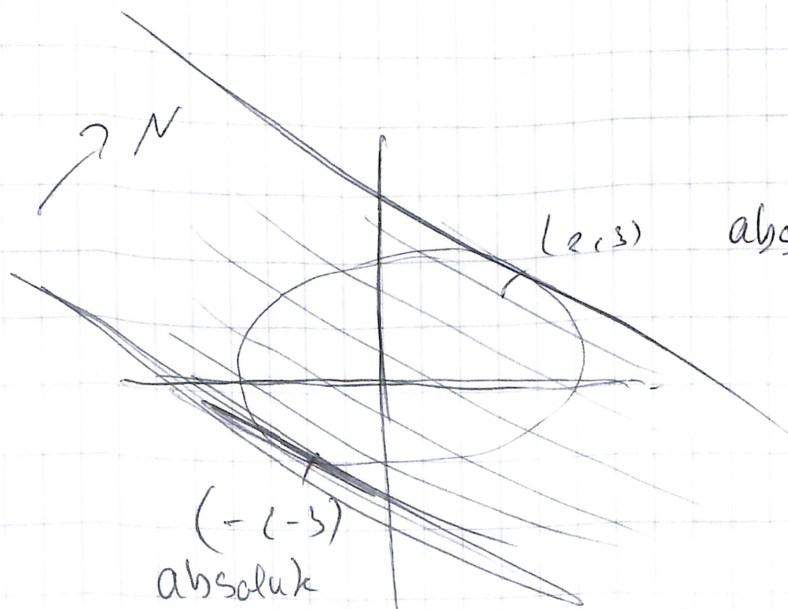
absolutes Maximum

(-2, -3)

absolutes
Minimum

Max unter
der NB

Min unter der NB



$$(1) \quad 2x(1+4\lambda) = 0$$

$$x=0$$

$$\lambda = -\frac{1}{4}$$

$$L_1 = 0$$

$$L_y = 0$$

$$y = \frac{3}{4}$$

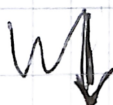
$$y = \frac{1}{3}$$

$$L_\lambda = 0$$

$$x^2 + \frac{5}{4} = 0$$

$$L = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{9}$$



$$(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{9})$$

$$\int (0, \frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$$

$$4x^2 + 12y$$

