

①

15. VORLESUNG

LO

OPERATION RESEARCH

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

Zielfunktion Gewinnfunktion Mengenfunktion

① Variable

 x_1 Anzahl der Tische x_2 Anzahl der Sessel

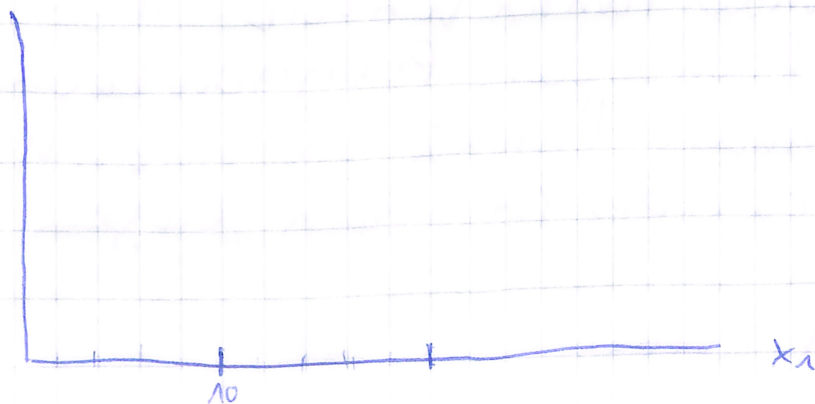
② VB

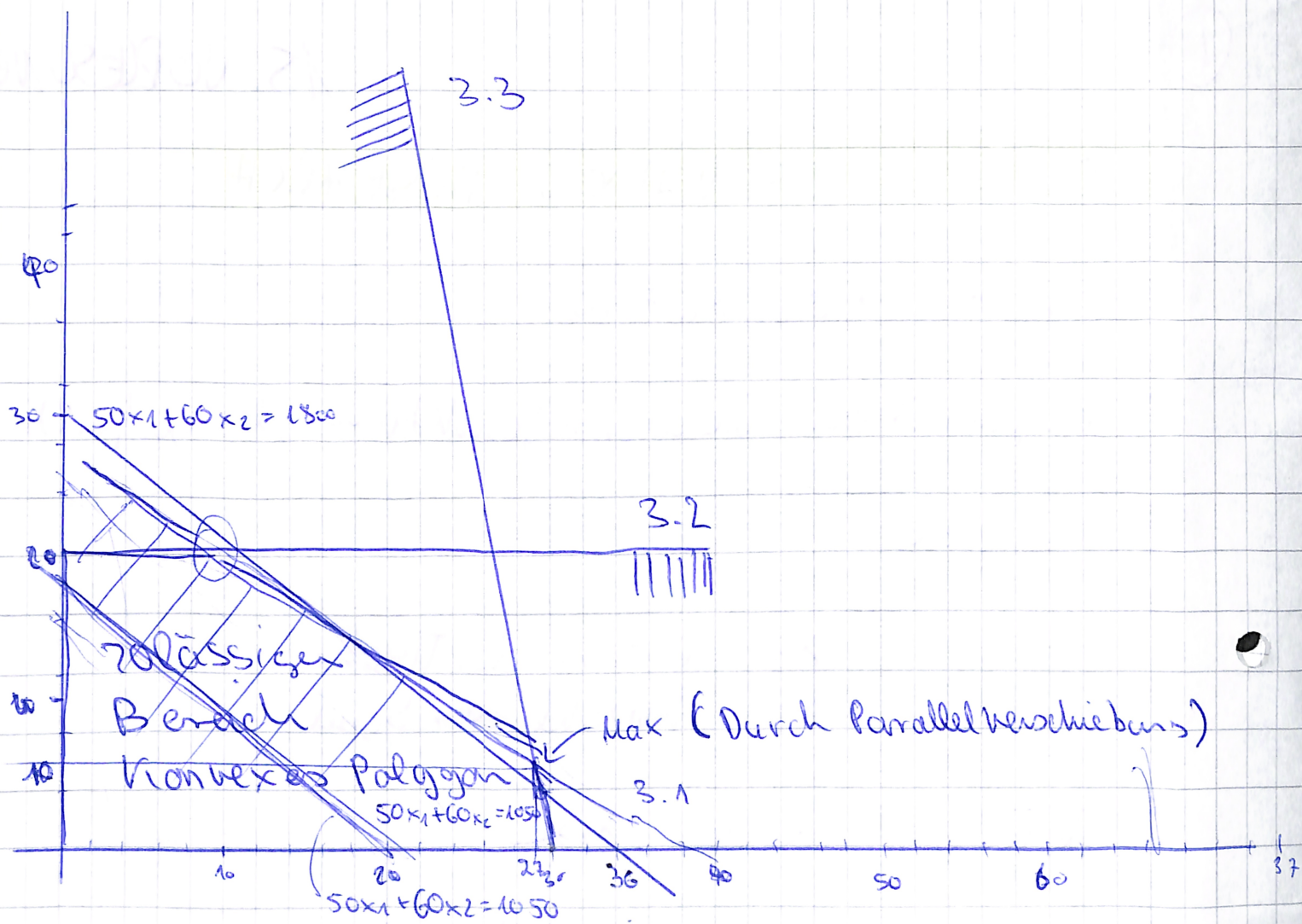
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\textcircled{3} \text{ Nebenbedingungen } \begin{aligned} 5x_1 + 9x_2 &\leq 225 \\ 20x_2 &\leq 400 \\ 10x_1 + 3x_2 &\leq 300 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad G(x_1, x_2) = 50x_1 + 60x_2 \rightarrow \max$$

(Simplexalgorithmus)

 x_2 



3.1 $5x_1 + 9x_2 \leq 225$
 3.2 $20x_2 \leq 400$
 3.3 $10x_1 + 3x_2 \leq 300$
 30 ?

- ☐ Konvexes Polygon
- optimale Punkte können nur auf dem Rand des Polygon liegen
 - Maximale Punkte können nur auf einer Ecke des Polygons liegen

überprüfe wieviel:
 $50x_1 + 60x_2 = 1050$

$$x_1 = 27$$

$$x_2 = 10$$

$$G(\max) = 50 \cdot 27 + 60 \cdot 10 = 1950$$

$$\begin{array}{rcl} 3.1. & 5x_1 + 9x_2 & = 225 \cdot (-2) \\ 3.3 & 10x_1 + 3x_2 & = 300 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 3.1. & 5x_1 + 9x_2 & = 225 \cdot (-2) \\ 3.3 & 10x_1 + 3x_2 & = 300 \end{array}} \right\} *$$

$$\text{Schritt p. 3.1 u. 3.3} - 15x_2 = -150$$

$$x_2 = 10$$

$$x_1 = 27$$

Der optimale Punkt liegt im Eckpunkt (Schn.p.) v. 3.1 u. 3.3. Um wegen evtl. ungenauer Zeichnungsmaßstäben zu vermeiden muss man anhand der beiden Gleichungen den genauen Schnittpunkt (Eckpunkt) ausrechnen. Dadurch erhält man das Maß des Gewinns.

Den optimalen Eckpunkt erhalten wir durch Parallelverschiebung der Gewinngeraden. Einige einsehen um danach parallel verschieben zu können bis man den besten Eckpunkt (Optimum) erreicht.

$$1. ZF: Z(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max$$

$$2. NB: a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1$$

⋮

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \leq b_m$$

$$3. NBB \quad x_1, x_2 \geq 0$$

allgemeine Standard maximum Problem

$$(1) ZF: Z = \vec{c}^T \vec{x}$$

$\vec{x}$ das n Variablen haben

$$(2) NB: A \vec{x} \leq \vec{b}$$

$$(3) NBB \quad \vec{x} \geq 0$$

Simplex - Algorithmus

Dualität, Schlupfvariablen - machen
aus Ungleichungen Gleichungen

Satz 5.13 : Zu jeder auch $D(f)$ streng
monotonen Funktion f existiert
eine Umkehrfunktion

Bsp $f : y = mx + b \wedge m \neq 0$
 $\Rightarrow x = \frac{y-b}{m} \quad f^{-1}(x) = \frac{x-b}{m}$

↑
Umkehrfunktion
der Geraden

5. Stetige Funktionen

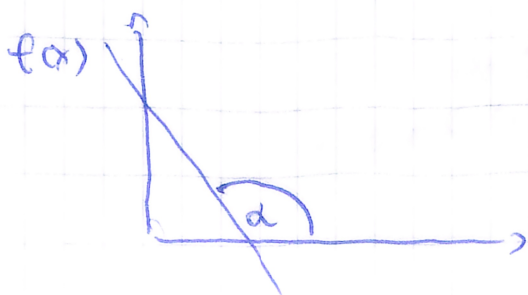
- Def Bereich
- Wertebereich
- 2 Mengen

Eindeutigkeit dieser Mengen

Def 5.1.1. Eine Funktion f heißt genau dann ganzrationale Funktion oder Polynom vom Grad n , wenn der Funktionsterm die Form $f(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ($a_k \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$) hat.

BSP: $f(x) = -12 + \sqrt[3]{26} x^3$

2. $f(x) = mx + b$



$$m = \tan \alpha$$

$$m = 0 : f \text{ konst } F$$

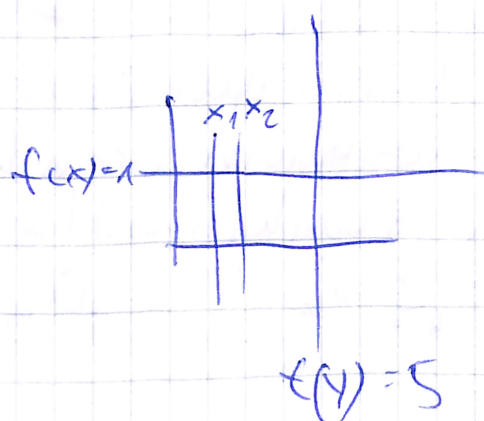
$$m = 1, b = 0 : \text{ident } F$$

Def. 5.1.2: Eine Funktion f heißt genau dann ^{wachsend} ~~monoton~~ ^{fallend} auf einer Menge $M \subseteq D(f)$ wenn gilt:

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in M} x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{matrix} f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) \geq f(x_2) \end{matrix}$$

Bem.: Es gibt den Begriff Streng Monoton

BSP $f(x) = 5$ ist ~~monoton~~ wachsend und monoton fallend



Bei strenger Monotonie sind die Gleichungen äquivalent

Streng monoton ^{wachsend} ~~fallend~~ ; wenn

$$x_1 < x_2 \quad \begin{matrix} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{matrix}$$

Lineare Optimierung

gesucht wird das Max. oder Min. einer linearen Funktion die man auch Zielfunktion nennt unter Nebenbedingungen die die Gestalt eines linearen Ungleichungssystems haben unter Nebenbedingungen

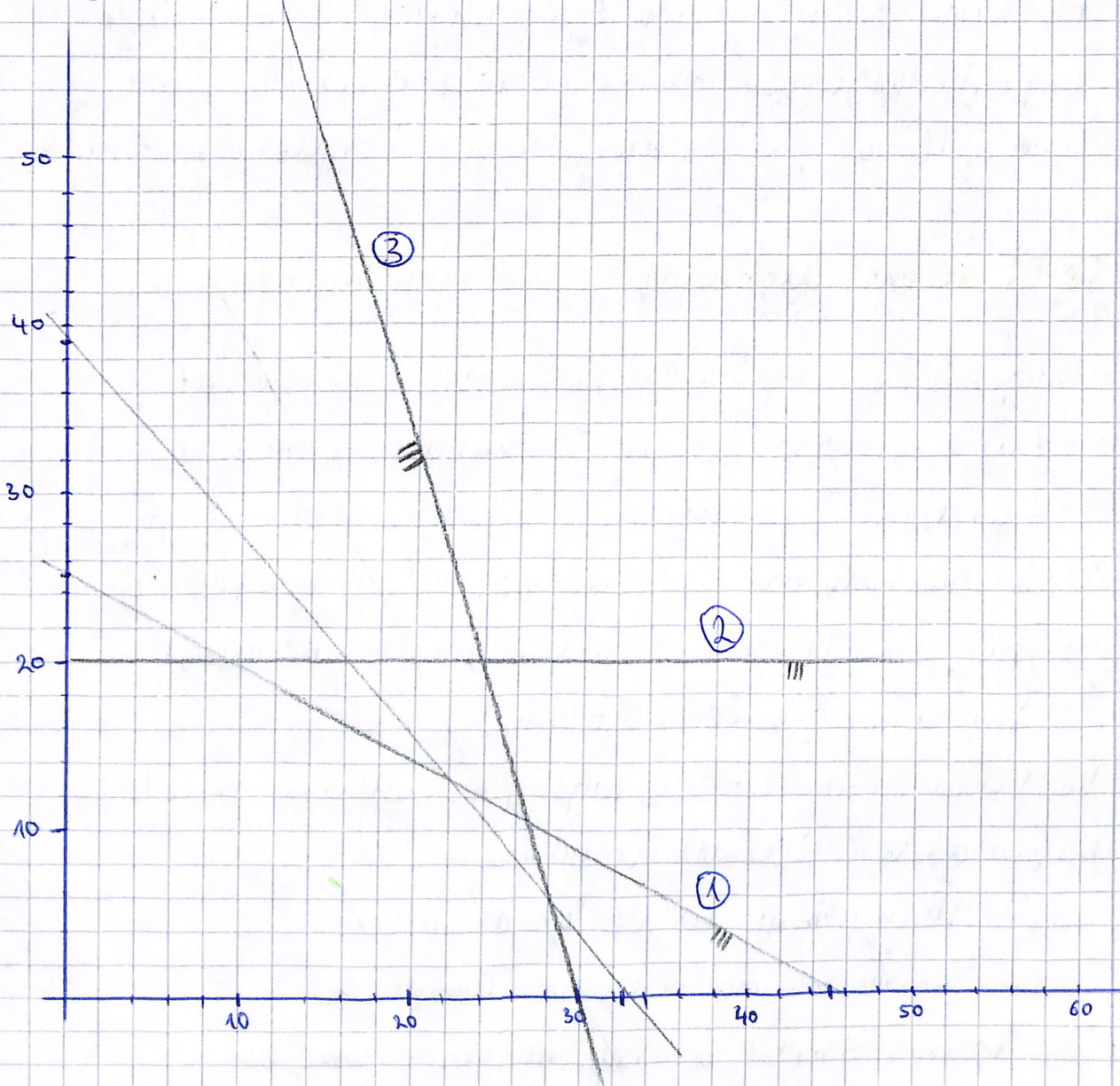
BSP: Eine Möbelfabrik hat noch Kapazitäten

- Sägemaschine 225 Einheiten freie Kapazität
 - für einen Tisch werden 5 Einheiten benötigt
 - für einen Sessel werden 9 Einheiten benötigt
- Polstermaschine hat eine freie Kapazität von 400 ZE
 - für einen Tisch werden 0 Einheiten benötigt
 - für einen Sessel 20 Einheiten
- Die Firma produziert auf Lager, es ist eine freie Lagerkapazität von 300 ME vorhanden
 - Ein Tisch nimmt 10 ME in Anspruch
 - Ein Sessel nimmt 3 ME in Anspruch
- Die Firma strebt Gewinnmaximierung an
 - Pro Tisch werden 50 Geldeinheiten Vereinnahmt
 - Pro Sessel werden 60 Geldeinheiten erzielt
- Wieviel Einheiten muss die Fa produzieren um eine Kapazitätsauslastung und Gewinnmaximierung zu erzielen?

$$\textcircled{1} \quad 5x + 9y \leq 225$$

$$\textcircled{2} \quad 20y \leq 400$$

$$\textcircled{3} \quad 10x + 3y \leq 300$$



Berechnung der Geraden für $\textcircled{1}$

$$5x + 9y \leq 225$$

$$5x \leq 225 - 9y$$

$$x \leq 45 - \frac{9}{5}y$$

$$5x + 9y \leq 225$$

$$9y \leq 225 - 5x$$

$$y \leq 25 - \frac{5}{9}x$$

Berechnung der Geraden für $\textcircled{2}$

$$20y \leq 400$$

$$y \leq 20$$

Berechnung der Geraden für ③

$$10x + 3y \leq 300$$

$$10x \leq 300 - 3y$$

$$x \leq 30 - \frac{3}{10}y$$

$$10x + 3y \leq 300$$

$$3y \leq 300 - 10x$$

$$y \leq 100 - \frac{10}{3}x$$

$$(30 \mid 100) \quad (15 \mid 50) \quad (3 \mid 10)$$

Berechnung des Maximums der Gewinnfunktion

$$5x + 9y \leq 225 \quad | \cdot (+2)$$

$$10x + 3y \leq 300$$

$$-15y \leq -150$$

$$y \leq 10$$

$y = 10$ in 2. Funktion eingesetzt ergibt:

$$10x + 3 \cdot 10 \leq 300$$

$$10x \leq 270$$

$$x \leq 27$$

$$50 \cdot 10 + 60 \cdot 27 = 1950 = \text{MAX}$$

$$50x + 60y = 1950$$

$$50x = 1950 - 6y$$

$$60y = 1950 - 50x$$

$$x = 32,5 - \frac{5}{6}y$$