

①

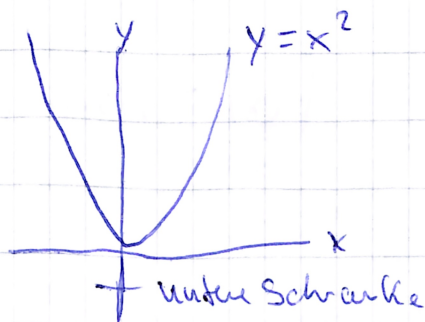
Parabel n-ter Ordnung

Def S. 1.4: Eine Funktion f heisst genau dann auf $M \subseteq D(f)$ nach oben beschränkt, wenn gilt:

$$\forall \begin{matrix} k_0 \\ k_n \end{matrix} \quad \bigwedge_{x \in M} \begin{matrix} f(x) \leq k_0 \\ f(x) \geq k_n \end{matrix}$$

Eine Funktion heisst genau dann auf $M \subseteq D(f)$ beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Bsp. =



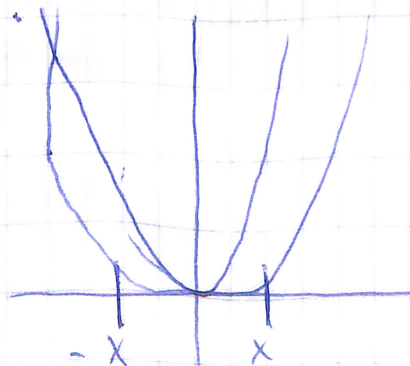
Bem: jede neg. Zahl ist eine untere Schranke

Def S. 15 Eine Funktion f mit zu null Sym. Definitionsbereich heisst genau dann gerade wenn gilt:

$$\bigwedge_{x \in D(f)} \begin{matrix} f(x) = f(-x) \\ f(x) = -f(-x) \end{matrix}$$

ungerade

BSP:



Spiegelachse

Funktionswerte sind gleich (Spiegelbild zur y-Achse)

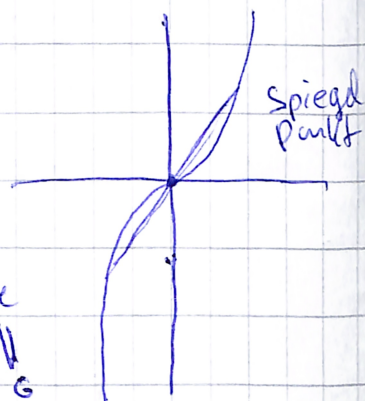
BSP:

$$f_1(x) = 3x^2 - 3 - 4x^6$$

$$f_2(x) = |x| \quad f_3(x) = \cos x$$

$$f_4(x) = 2x^3 - 4x - x^5$$

muss durch den
Nullpunkt gehen
(für $x=0$ ist die
Funktion null) !!



$$f_5(x) = \sin x, \quad f_6(x) = x|x|$$

Das sind Sonderfälle | Gerade u. ungerade
zum Nullpunkt

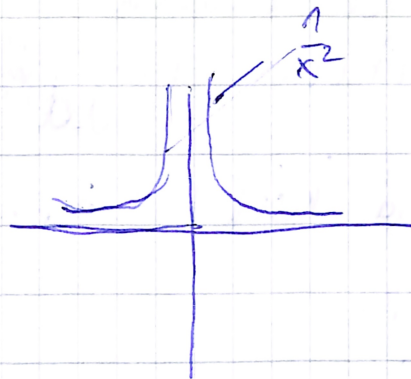
Def 5.1.6 Eine Funktion f heißt genau
dann gebrochen rationale
Funktion, wenn der
Funktionsform die Form $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ hat,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (Q(x) \neq 0) \text{ hat,}$$

wobei P und Q Polynome sind
und der Grad von Q mind.
1 ist.

BSP: $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$

Hyperbeln-ter
Ordnung



gilt für alle
~~x~~ Hyperbeln
gerader Ordnung

Bem.: Die $\pm x$ und $\pm y$ Achse sind
Asymptoten der Funktion



$\frac{1}{x}$ i $\frac{1}{x^3}$

(fallen monoton)
aber nicht monoton
fallend auf ihren
Def-Bereich!

Die Hyp mit ungeraden Exponenten
sind unbeschr. Asymptoten
sind die $\pm x$ und $\pm y$ Achse

→ Die y -~~Achse~~ ist keine Funktion
aber eine Gerade!

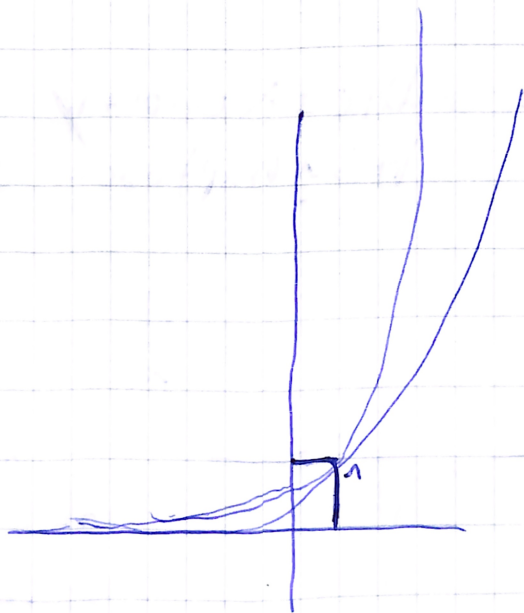
Sind die Hyp. monoton

lokale Monotonie → an einem Punkt
Global → mehrere Punkte

Def 5.1.7: Eine Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = \overset{\text{da}}{\cancel{a^{\beta x}}} a^{\beta x}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$

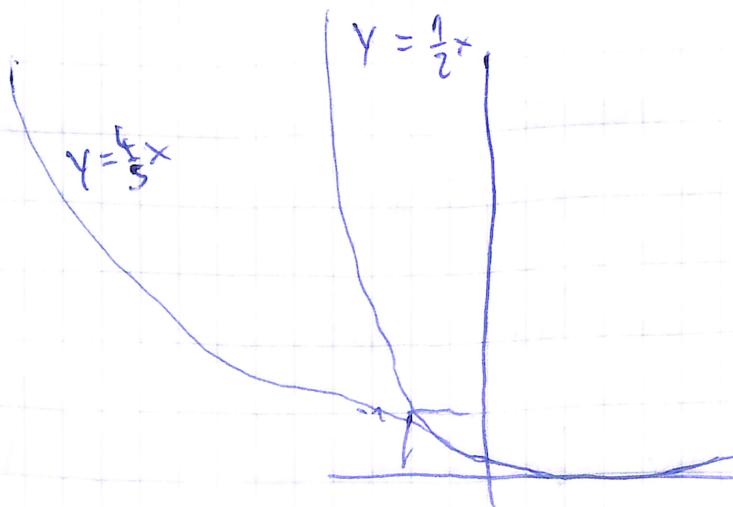
$f(x) = \overset{\text{da}}{\cancel{a^{\beta x}}} a^{\beta x}$ heißt Exponentialfunktion

$$f(x) = a^{b \cdot x}$$



- alle Exponential-
Funktionen
gehen durch den
Punkt 0 1

- neg. x-Achse ist Asymptote



Pos. x-Achse
ist Asymptote
~~neg. x-Achse ist~~
neg. y Achse
ist untere Grenze

②

Ist a zw 0 und 1 dann sind die
Funkt. monoton fallend.
Bzw

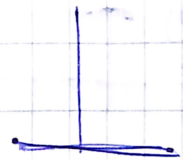
$$a > 1 : f \nearrow$$

$$a < 1 : f \searrow$$

$$y = a^x$$

$$D(f) = \mathbb{R}, B(f) = \mathbb{R}^+$$

$$y = a^x \Leftrightarrow x = {}_a \log y$$



$$f^{-1}(x) = {}_a \log x$$

$$D(f^{-1}) = \mathbb{R}^+, B(f^{-1}) = \mathbb{R}$$

Logarithmus Naturalis

Basis 10 $10 \log \rightarrow$ Dekadischer $\log$

$\Rightarrow$ trigonometrische Funktion

Sin x

cos x

tang x

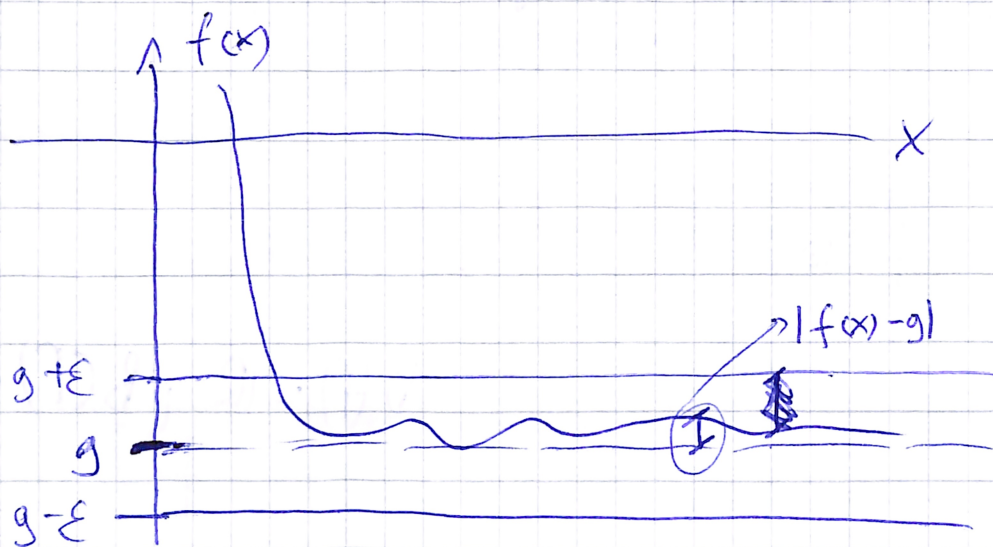
$$\cotang x = \frac{1}{\tan x}$$

beschränktheit

monotonie

Asymptoten

5.2. Grenzwerte von Funktionen



hat die Funktion einen Grenzwert g

Die Funktion soll an den Grenzwert kommen
deshalb schneidet man $g \pm \text{Epsilon } \epsilon$

Gesucht wird der Bereich wo die
Funktion den Epsilon - Streifen
nicht mehr verlässt

→ Funktion hat einen Grenzwert
Schwankungen müssen immer kleiner
werden!

ϵ können beliebig klein werden!
erst ϵ , dann $\frac{1}{2} \epsilon$, $\frac{1}{4} \epsilon$...

Def 5.2.1. Eine Funktion f mit rechtsseitig
 unbeschränktem Definitionsbereich
 $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert für x
 gegen unendlich genau dann
 gegen einen Grenzwert g , wenn
 es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ (positiven
 Zahl) (noch so klein) eine Zahl
 $X(\varepsilon)$ gibt, sodass für alle $x > X(\varepsilon)$ gilt:

$$|f(x) - g| < \varepsilon.$$

SW: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} g \quad \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{X(\varepsilon)} \bigwedge_{x \in D(f)}$$

$$x > X(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

BSP: $f(x) = \frac{1+2x^2}{x^2} \quad (x > 0)$

Beh: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$

Bew: $\left| \frac{1+2x^2}{x^2} - 2 \right| = \frac{1}{x^2} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = X(\varepsilon)$ beliebige Zahl

Def 5.2.2 (uneigendlicher Grenzwert)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty \quad : \Leftrightarrow \bigwedge_{K \in \mathbb{R}} \bigvee_{x(K)} \bigwedge_{x \in D(f)}$$

$$x > x(K) \Rightarrow \pm f(x) > K$$

BSP: $\exists f(x) = x^2 - 1\,000\,000\,000 > K$

$$\Leftrightarrow x > \sqrt{K + 1\,000\,000\,000} = x(K)$$

BSP 2: $\sqrt{x^2 + x} - x$
 geht gegen ∞ geht gegen $-\infty$

" $\infty - \infty$ " darf nicht geschrieben werden d.h.:

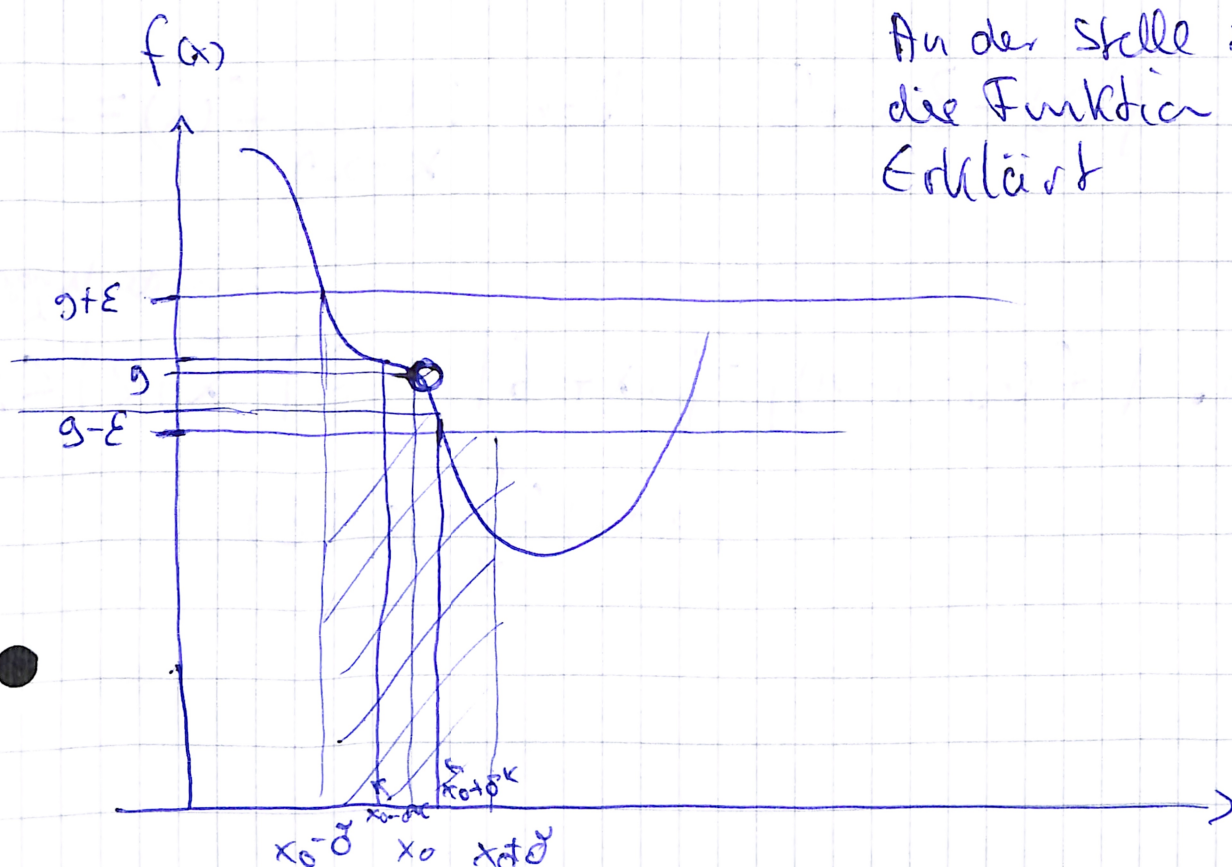
vom Typ ∞

strebt gegen $\frac{1}{2}$

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

③



An der Stelle x_0 ist die Funktion nicht erklärt

Def 5.2.3 Eine Funktion f konvergiert für x gegen x_0 genau dann gegen einen Grenzwert ~~Werte~~ $g \in \mathbb{R}$, wenn der Betrag $|f(x) - g|$ dadurch beliebig kleingemacht werden kann daß man den Betrag $|x - x_0|$ hinreichend klein gewählt wird ($x \neq x_0$)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$$

$$\begin{array}{c} \wedge \quad \vee \quad \wedge \\ \varepsilon > 0 \quad \delta(\varepsilon) \quad x \in D(f) \end{array} \quad \begin{array}{l} x < |x - x_0| < \delta \\ |f(x) - g| < \varepsilon \end{array}$$

////

Bsp: $f(x) = 3x + 5$

Beh: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1$

Bew. $|f(x) - (-1)| = |3x + 6| = 3|x + 2| < \varepsilon$ ^{x in der Umgebung -2}
 $|x + 2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta(\varepsilon)$