

1

17. Vorlesung 15.12

Grenzwert der Funktion

Def 5.2.4 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$

(man nähert sich dem GW von links)

linkseitiger Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = g : (\Leftrightarrow) \bigwedge_{\epsilon > 0} \bigwedge_{\delta(\epsilon)} \bigwedge_{x \in D(f)} 0 < x_0 - x < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon$$

rechtsseitiger Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = g : (\Leftrightarrow)$$

entsprechend bis auf 1. Teil (selbst überlegen)

Def ~~5.2.4~~ 5.2.5 (uneigendl. GW)

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty : (\Leftrightarrow)$$

Schwanke ist Parallel zur x-Achse

$$(\Leftrightarrow) \bigwedge_{K \in \mathbb{R}} \bigvee_{\delta(K) > 0} \bigwedge_{x \in D(f)} 0 < x - x_0 < \delta(K) \Rightarrow f(x) > K$$

Wie sieht es aus mit

$$x \rightarrow x_0 + 0$$

versch. Schreibweisen

Bem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$= \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x_0 < x}} f(x)$$

$$\text{Satz 5.2.6: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) =$$

$$g \wedge \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = g$$

Summe von 2. Grenzwerten

$$\text{Satz 5.2.7. } \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = g_1 \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = g_2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \pm f_2(x)] = g_1 \pm g_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = g_1 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = g_2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g_1}{g_2}$$

5.3 Stetige Funktionen

Def 5.3.1: Eine Funktion f heißt stetig ~~an~~

$x_0 \in D(f)$ genau dann, wenn zu

jeder $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$

$\rightarrow$ Umgebung

existiert, daß für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap D(f)$

gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

f stetig an $x_0 \in D(f)$: $\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta(\varepsilon)} \bigwedge_{x \in D(f)} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft
nicht global!

BSP 1.) $f(x) = \sqrt{x}$ $D(f) = \mathbb{R}_0^+$

$\lim_{x \rightarrow 3}$

$$|f(x) - f(3)| = |\sqrt{x} - \sqrt{3}| =$$

Erweiterung mit 3. Binom.

$$\frac{|x-3|}{|\sqrt{x} + \sqrt{3}|} \leq \frac{|x-3|}{\sqrt{3}} < \epsilon$$

Vergrößert, da für $\sqrt{x} = 0$ geht

$$\Leftrightarrow |x-3| < \epsilon \sqrt{3} = \delta(\epsilon)$$

d.h. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} x} = \sqrt{3}$

für die Stetigkeit ist die Vertauschung von $\sqrt{\quad}$ und $\lim$ erlaubt!

2.) $f(x) = |x+5|$ $x_0 = -5$

$$\lim_{x \rightarrow -5+0} (x+5) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -5-0} (-(x+5)) = f(-5)$$

②

3)

$$f(x) \begin{cases} \frac{2x^2 - 12x + 18}{x-3} & x \neq 3 \\ \frac{0}{0} \text{ "nicht definiert"} & x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x=3 \quad & 2x^2 - 12x + 18 \\ & = 2(x^2 - 6x + 9) \\ & = 2(x-3)^2 \\ & = \frac{2(x-3)^2}{x-3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2(x-3) = 0 = \cancel{f(3)} f(3)$$

Satz 5.3.2: Ist f an x_0 und in einer Umgebung $U(x_0)$ erklärt, so gilt:

$$f \text{ stetig an } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Def 5.3.3 Globaler Begriff der Stetigkeit

Eine Funktion f heißt genau dann stetig auf einem Intervall I wenn sie an jeder Stelle $x_0 \in I$ stetig ist.

$\rightarrow$ Sie ist auf dem Intervall stetig

Def 5.3.4: Eine Stelle x_0 heißt genau dann Definitionslücke einer Funktion f , wenn

$x_0 \notin D(f)$, wenn es aber eine punktierte Umgebung $\dot{U}(x_0) \subseteq D(f)$ gibt.

Bsp: 1. $f(x) = \frac{1}{x^4} - 12 \quad (x \neq 0)$

2. $f(x) = \begin{cases} 12 & \text{für } x > 2 \\ -4 & \text{für } x < 2 \end{cases}$

3) $\sqrt{x} \quad D(f) \mathbb{R}^+$

0 ist nicht definiert
neg. Zahlen nicht def.
deshalb ist 0 keine Funktionslcke!

Def 5.3.5 Eine Stelle x_0 heißt genau dann linksseitige Unendlichkeitsstelle einer Funktion f , wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = -\infty$$

rechtsseitige Unendlichkeitsstelle einer Funktion f , wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = -\infty$$

~~Wenn~~

Unendlichkeitsstelle eine Funktion f , wenn sie links u. rechtsseitige Unendlichkeitsstelle ist.

Bem.: Eine Unendlichkeitsstelle braucht keine Definitionslücke zu sein.

Bsp.: 1) $f(x) = \frac{1}{x}$ $D(f) = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$ 0 keine US

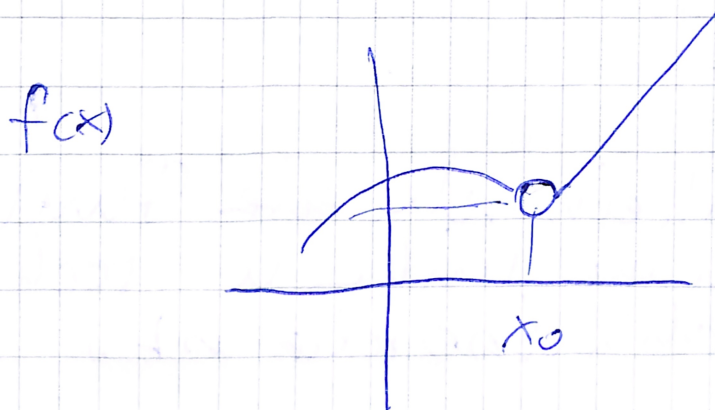
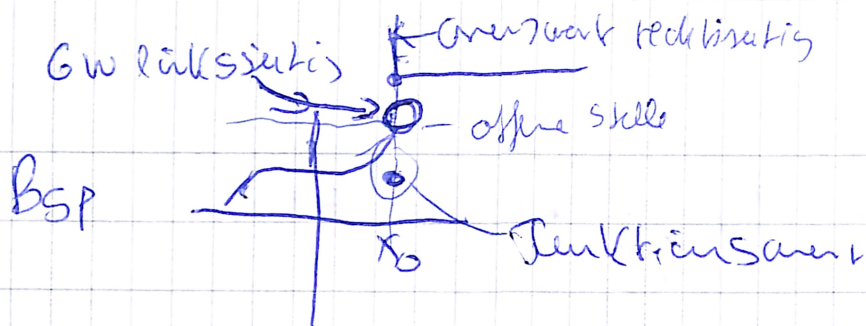
2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $x \neq 0$ eine US
da immer $+\infty$

Def 5.3.6

Eine Stelle x_0 heißt genau dann Sprungstelle einer Funktion f , wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \text{ und } \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \text{ existieren}$$

und verschieden sind oder nicht mit $f(x_0)$ übereinstimmen.



Wenn GW und Funktionswert versch.
existiert ~~und~~ Sprungwert

Satz 5.3.7: Jede konstante Funktion
ist stetig auf
 $D(f) \subseteq \mathbb{R}$

Satz 5.3.8 Jede lin. Funktion f ist
stetig auf $D(f) \subseteq \mathbb{R}$

Bew: $f(x) = mx + n$ ($m \neq 0$)

$$|f(x) - f(x_0)| = |m| |x - x_0| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{\epsilon}{|m|} = \delta(\epsilon)$$

③

Satz 5.3.9: Sind f und g an x_0 stetig,
so auch $f \pm g$ ist $g(x_0) \neq 0$,
so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig an x_0 .

Satz 5.3.10: Jedes Polynom ist stetig
auf $D(f) \subseteq \mathbb{R}$

Bew: Sätze 5.3.7, 5.3.8, 5.3.9

Satz 5.3.11 Jede gebrochene rationale
Funktion F ist stetig
auf $D(f) \subseteq \mathbb{R}$

Bew: ^{Satz} 5.3.10, 5.3.9

Satz 5.3.12: Die Wurzelfunktion ist
stetig auf ihrem Definitionsbereich

$$D(f) \subseteq \mathbb{R}_0^+$$

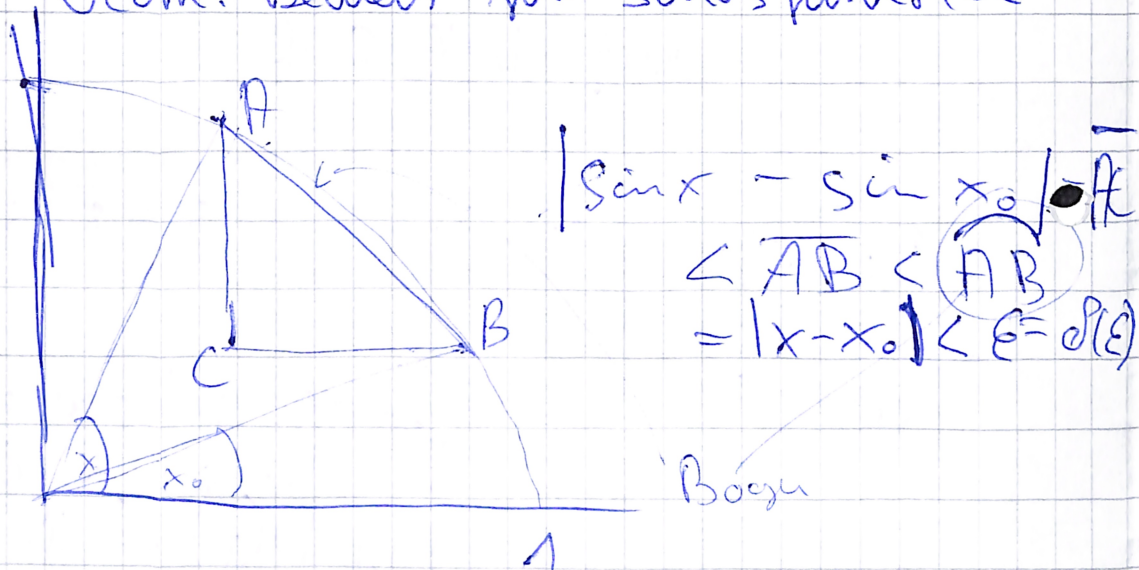
Bew: a) $x \neq 0$ s.o.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow |f(x) - f(0)| &= \sqrt{x} \Leftrightarrow \\ 0 \leq x &< \varepsilon^2 = \delta(\varepsilon) \end{aligned}$$

Satz 5.3.13 Die trigonometrischen Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich;
die Exponentialfunktionen sind stetig auf $\mathbb{R}$

Bew:

Geom. Beweis für Sinusfunktion



$\sin x = \text{Gegenkat.} \cdot \text{Hypotenuse}$

Satz 5.3.14: Ist f stetig, $D(f)$ und existiert die Umkehrfunktion f^{-1} , so ist f^{-1} stetig auf $B(f)$.

Folgerung: Log-Funktionen sind stetig

Satz 5.2.15 Verknüpfen
von Funktionen $\rightarrow$ Komposition

Ist eine Funktion f an einer Stelle
 $x_0 \in D(f)$ stetig und eine Funktion g
an $f(x_0) \in D(g)$ stetig, so ist auch
die Funktion $F = g \circ f$ mit
(Verknüpfungssymbol)

$F(x) = g(f(x))$: $\rightarrow$ Erst wirkt Funktion
 $f(x)$ dann $g \rightarrow$ daraus
ergibt sich $F(x)$

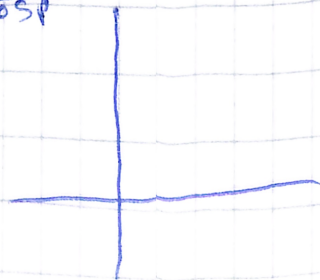
So ist auch die Funktion F an der
Stelle $x_0 \in D(F)$ stetig.

Bew: Beckmann Künzi

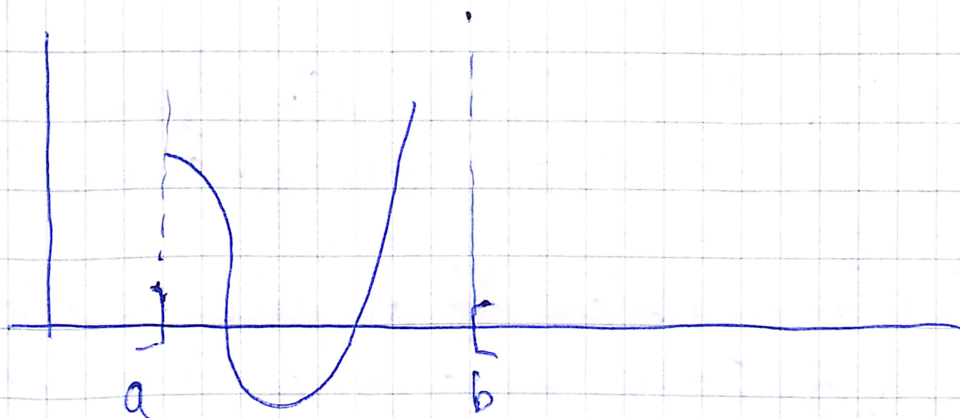
Satz 5.2.16: Ist f auf $[a, b]$ stetig, so
ist f auf $[a, b]$ beschränkt.

Bem:

~~Gegenbsp~~



$\hookrightarrow$ Satz ist falsch,
wenn Gegenbsp nicht
abgeschlossen ist



Satz 5.3.17! Ist f auf $[a, b]$ stetig, so besitzt f auch $[a, b]$ ein Max und ein Min.

Bem: 1) ~~Was für~~ Max, Min: absolutes Max oder Min, wie relatives:

2) Es kann mehrere Max, Min geben.

Satz 5.3.18 ist f auf $[a, b]$ stetig und gilt $f(a) \neq f(b)$, so gibt es eine Stelle aus dem inneren derart, dass f

$$(x_0 \in]a, b[) \quad f(x_0) = 0$$