

①

20.12 18. Vorlesung

Intervallschachtelung HHH

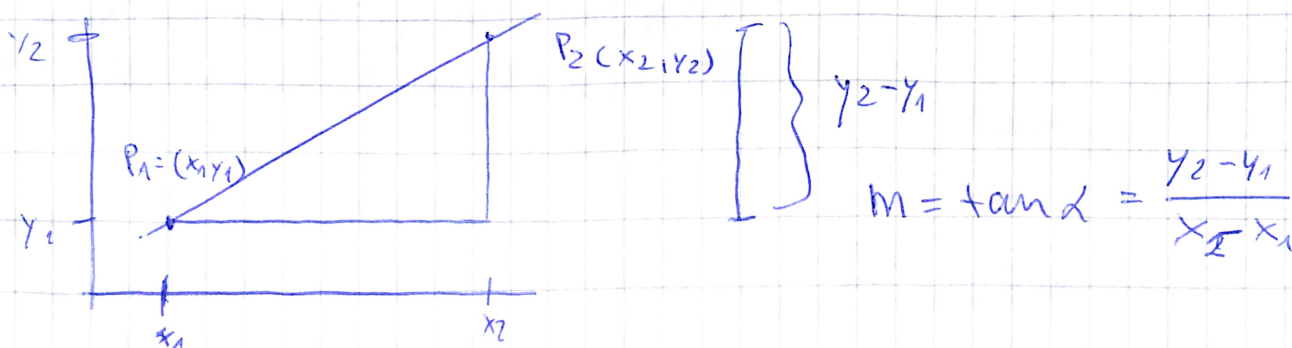
Stetigkeit einer Funktion

6. Differenzierbare Funktionen

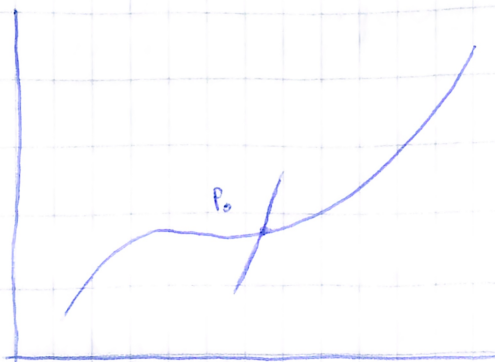
6.1 Der Begriff der Ableitung

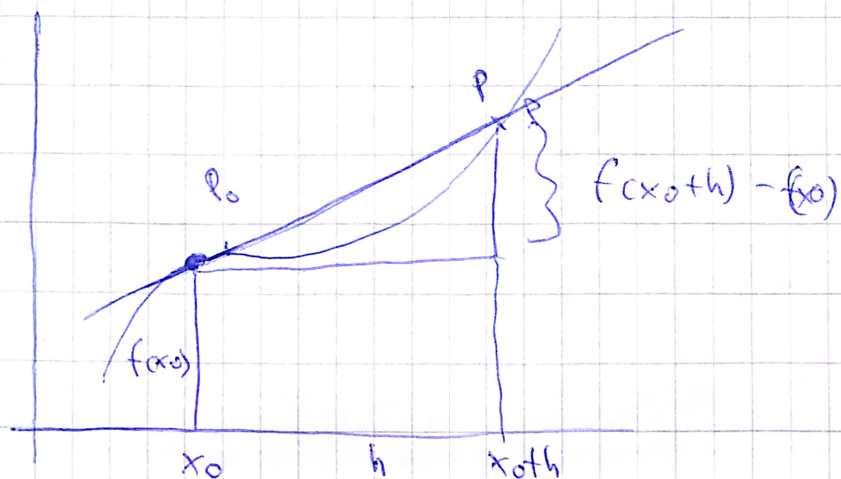
$f(x_0)$

Es kommt auf die Änderung an $\rightarrow$ Änderungstendenz



Die Steigung einer Geraden ist immer stetig (gleich)
(Bei einer Graph (Kurve) ist die Steigung nicht stetig (gleich))





Def 6.1.1. Der Term $m(x_0, h) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\underbrace{h}_{\text{Zuwachs}}}$

mit $x_0, x_0+h \in D(f)$, $h \neq 0$ heißt
Differenzenquotient der
Funktion f an der Stelle x_0 .

Def 6.12 : Eine Funktion f heißt genau
dann an einer Stelle x_0
differenzierbar, wenn es eine
Umgebung $U(x_0) \subseteq D(f)$ und

$$\lim_{h \rightarrow 0} m(x_0, h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

Dieser Grenzwert ~~wird dann~~
heißt die Ableitung der
Funktion f an der Stelle x_0 und
wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet

→ Die Ableitung ist der Grenzwert des Differenzenquotienten

Def 6.1.3 Ist eine Funktion f
differenzierbar an einer Stelle x_0
lokaler Begriff

schreibt eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ genau
dann Steigung des Funktions-
graph im Punkt $P_0 = (x_0, f(x_0))$,
wenn gilt:

$$m = f'(x_0).$$

7 { Wenn Sekanten eine Grenzlage
haben ist die Steigung an
einer Stelle $f'(x_0)$

Def 6.1.4 Eine Gerade g heißt
genau Tangente an einen
Funktionsgraph im
Punkt $P_0 = (x_0, f(x_0))$

(Schreibweise sei
den Punkt
wichtig!!)

wenn sie die Steigung $m = f'(x_0)$ hat und durch den Punkt P_0 geht

S: Der Graph von f hat in P_0 die Steigung $f'(x_0)$

Steigung / Differenzierbar ist ein
(lokal) Begriff

Def 6.1.5: Eine Funktion f heißt

$\left(\begin{array}{l} f = \text{Funktion} \\ f(x) = \text{Funktionswert} \\ f'(x) = \text{Funktionsableitung} \end{array} \right)$

genau dann in einem
offenem Intervall I differen-
zierbar wenn sie an jeder
Stelle $x \in I$ differenzierbar
ist.

Def 6.1.6: Eine Funktion f
heißt genau dann auf einem
abgeschlossenen Intervall
 $[a, b]$ differenzierbar wenn
sie auf dem offenen

② Intervall $]a, b[$ differenzierbar
und in a und b links- bzw. rechts-
seitig differenzierbar ist. d.h.

Wenn $\lim_{h \rightarrow 0^+} m(a, h)$ und $\lim_{h \rightarrow 0^+} m(b, h)$

existieren

$b+h = h$ negativ

Wenn
(Voraussetzung)

Satz 6.1.7 Ist eine Funktion
 f an einer Stelle x_0
differenzierbar, so ist sie
dort auch stetig.

Bew.: z.z. Stetigkeit von f an x_0 , d.h.
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Der Grenzwert muss existieren
und gleich dem Funktions-
wert sein

$$x - x_0 = h$$

$$x - x_0 = h \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \text{ d.h.}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\stackrel{\text{S. 2.7}}{=} f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Differenzierbarkeit ist eine hinreichende Bedingung

→ kann die Differenzierbarkeit notwendig sein

→ deshalb fragt man:

Die Differenzierbarkeit ist nicht (braucht nicht) notwendig sein.

$$f(x) = x|x| \quad m(0, h) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} m(0, h) = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-0} m(0, h) = -1$$

Die Funktion ist an der Stelle null nicht differenzierbar

Die Funktion

Stetigkeit ist ^{eine} notwendige aber
keine hinreichende Bedingung für
die Differenzierbarkeit

6.2. Ableitungen elementarer Funktionen

• Satz 6.2.1 $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

Bew

~~Wiederholung~~

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h}$$

$$(h \neq 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

Eine Konstante abgeleitet
ergibt Null!

Satz 6.2.2: $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

Beweis:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$\frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

$$h \neq 0$$

$$\frac{3x^2 + 3xh + h^2}{1}$$

$$= 3x^2 + \underbrace{3xh}_0 + \underbrace{h^2}_0$$

$$= \xrightarrow{h \rightarrow 0} 3x^2$$

$$= 3x^2$$

h o bleibt
gehen null

h der
Klausur

Satz 6.2.3

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$D(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \right]$$

$$D(f') = \mathbb{R}^+$$

da $\frac{1}{0}$ nicht def.

Bew: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

Erweitern

$$= \frac{x+h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

3

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} \sqrt{x}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\frac{f(h)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$$

Unendl. Grenzwert = Gerade auf der y-Achse - Steigung = ∞

Satz 6.2.4 $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \Rightarrow f'(x) = \boxed{-\frac{1}{x^2}}_{(x \neq 0)}$

Bew $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} =$

$$\frac{x - x - h}{h \cdot x(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \underline{\underline{-\frac{1}{x^2}}}$$

Satz 6.2.5 $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

Bew $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

hier in der Klausur

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$\alpha = x+h \quad \beta = x$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \frac{2}{h} \cos \frac{2x+h}{2} \sin \frac{h}{2}$$

$$= \cos \frac{2x+h}{2} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos x \cdot 1$$

Ableitung von $\sin x$ ~~von~~ $\cos x$

hier in der Klausur

Satz 6.2.6 $f(x) = \cos x = f'(x) = -\sin x$

Beweis: Wie oben! $\square$

Satz 6.2.7

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ (wichtig)

Beweis: $\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0}$

wg. $e^x \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$

6.3 Ableitungsregeln

Satz 6.3.1

Sind die Funktionen f_1, f_2 differenzierbar an einer Stelle x , so auch die Funktion $f = f_1 \pm f_2$ und es gilt:

$$f(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \Rightarrow f'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x)$$

Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der Ableitungen

$$\text{Bew } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \frac{f_1(x+h) + f_2(x+h) - f_1(x) - f_2(x)}{h}$$

$$= \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} + \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}$$

$$= \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} + \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}$$

$$h \rightarrow 0$$

$$= \underline{\underline{f'_1(x) + f'_2(x)}}$$

Satz 6.3.7. Ist eine Funktion g differenzierbar an einer Stelle x , so ist auch die Funktion $f = c \cdot g$ ($c \in \mathbb{R}$) differenzierbar an der Stelle x und es gilt: $f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$

$\rightarrow$ Eine Multiplikative Konstante bleibt erhalten

④

$$\text{Bew: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cancel{\lim_{h \rightarrow 0}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c g(x+h) - c g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} c \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= c g'(x)$$

$$\text{Bsp: } f(x) = -\frac{3}{4} x^4 \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{4} 4x^3$$

$$= \underline{\underline{-3x^3}}$$

~~erst $\frac{3}{4}$ ableiten~~

0

~~dan x^4 ableiten~~

0

l'absch ein Produkt von
? Funktionen. Also
den Ableitungen

$$f(x) = u(x) \quad v(x) = f'(x)$$

Produktregel
Quotientenregel