

①

2. VORLESUNG

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \Rightarrow \text{Aussageform}$$

Setzt man für die Variablen etwas ein wird aus einer Aussageform eine Aussage

allgemeingültig durch Quantoren

Junktoren

Voraussetzung (Prämisse)

$\rightarrow$ aus A folgt B

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Die Tür ist ab 17 Uhr geschl.

wenn es 17 Uhr od. später, dann ist die Tür geschlossen.

A 17 ⁰⁰	B Tür geschl.	Folgerung
w	w	w
f (16 ⁰⁰ Uhr Ankunft)	f	f
	w (Tür geschl.)	-

Aus einer falschen Prämisse kann alles folgen

Implikation
 $A \Rightarrow B$

A folgt $\Rightarrow$ B, hat genau dann den Wahrheitswert F wenn A Wahr und B Falsch ist.

A ist hinreichende Bedingung für B
und B ist notwendig für A

2) nur dann gilt A wenn B gilt

zB. Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist sie auch durch 2 teilbar

nur dann ist eine Zahl durch 2 teilbar wenn sie auch durch 4 teilbar ist

Aquivalenz $\Leftrightarrow$ "genau dann - wenn"

A	B	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

BSP: Das Jahr x hat 366 Tage

Bx der Feb. des Jahres hat 29 Tage

$A \Leftrightarrow B$ hat genau dann den Wahrheitswert W wenn A u. B den selben Wahrheitswert haben (entweder beide W oder beide F)

Satz 1.1.4: Für alle Aussagen A, B gilt:

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$

Kommutativ - Gesetz der Aussage logik
Kommutativ - Gesetze

Assoziativgesetze 3. Aussagen

aus 3 Aussagen kann man keine neue machen!

$$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$$



$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Distributiv-
gesetz

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

— " —

Regeln von de Morgan

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

Beweis

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

bei oder oder richtiges wenn einer wahr ist für eine wahre Aussage

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

w
w
w
w

ged.

Satz 1.15

$\bigwedge_x A(x)$

(Vernennung)

$$\neg \bigwedge_x A(x) \Leftrightarrow \bigvee_x \neg A(x)$$

$$\neg \bigvee_x A(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \neg A(x)$$

$$\forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall x \exists y \neg A(x, y)$$

es muss ein x geben so dass für alle y A(x, y) gilt

Was muss man beim Verneinen machen?

jeder Quantor wird durch den entgegengesetzten ersetzt und die Aussageform verneint !!

All quantor durch

Die Reihenfolge wird nicht vertauscht

wenn heute Samstag ist besteht der Kater aus grünen Käse

$$A \Rightarrow B$$

A	B	A $\Rightarrow$ B
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

2

1.2 Beweismethode

Direkter Beweis: $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \dots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$

Begunne mit A erhält man durch eine Schlusskette B

Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Statt A folgt B zeigt man
die dazu äquivalente Aussage
nicht B folgt nicht A

Indirekter Beweis (W) (Beweis durch Widerspruch)
Voraussetzung gelten

$$\begin{array}{ccc} \text{gilt} & A \wedge \neg B & \Rightarrow C \wedge \neg C \\ & \text{gilt nicht} & \\ & & \text{c gilt und gilt gleichzeitig nicht} \end{array}$$

B gilt deshalb doch

! da C nicht gilt kann nur B gelten!
~~da~~

Vollständige Induktion:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} A(n) \Leftrightarrow (A(1) \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} A(n) \Rightarrow A(n+1))$$

Bsp 1 $f(n) = n^2 - n + 41$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	30	...	40	41
f(n)	41	43	47	53	61	71	83	97	113	131	...	911	...	1601	(41)

Primzahlen

Man kann nicht beweisen dass nur Primzahlen heraus kommen $\rightarrow$

keine Primzahl

Bsp $1 = 1^2$

$1+3 = 2^2$

$1+3+5 = 3^2$

$1+3+5+7 = 4^2$

Ergebnis: Die Summe von ungeraden Zahlen
immer eine Quadratzahl

$1+3+\dots+2n-1 = n^2$

$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$

wenn beweise $n=3$ $(2 \times 3 - 1) = 5 \neq 1$

Bew (vollst. Ind.): $A(n) : \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$

I Ind. Anf:

z.z. $A(1) \wedge W$

$A(1) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^1 (2k-1) = 1^2$

$\Leftrightarrow 1 = 1(W)$

II Induktionsschritt:

z.z. $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (A(n) \Rightarrow A(n+1))$

sei $n \in \mathbb{N}$ (fest)

a) Ind. Voraussetzung: $A(n) \wedge W$ ^{Annahme}

d.h. $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \wedge W \rightarrow$ Aussage?

n ist fest

b) Ind. Behauptung

Dann gilt auch $A(n+1)(w)$

$$\text{d.h. } \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2 \quad (w)$$

c) Beweis

Die Beh. kann für den Beweis nicht benutzt werden

die Formel darf nicht gesamt genutzt werden
eine (linke) Seite herausheben

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) + 2n+1$$

für k wird n gesetzt

=

$$\text{Ind. Voraussetzung} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

qed.

1.3 Mengenlehre

G. Cantor: Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung von wohldefinierten und wohlunterscheidbaren Objekten unseres Denkens od. unserer Anschauung zu einem Ganzen

eine Menge ist def. wenn man von jeder ~~ding~~ ^{ding} entscheiden kann ob es zu dieser Menge gehört oder nicht.

$x \in M$ x ist Element von M
 $(x \notin M \text{ Element v. } M) \text{ nicht Element v. } M$

x gehört zu M

x liegt in M

$x \in M$

$$\{7, 1, 12\} = \{1, 12, 7\} = \{7, 12, 7, 1, 12\}$$

$$\mathbb{N} \{1, 2, 3, \dots\}$$

Ein Element kann in einer Menge durch Mehrfachzählung öfter als einmal auftreten -

Es zählt dann jedoch nur als ein Element

Schreibweise
 (nicht gut da es auch mit 23, 24, 25 weiter gehen kann)

Sondern besser ist:

$$\{x \mid A(x)\}$$

$$\{x \mid x+2=9 \vee 1+x=2 \vee 3x=36\}$$

Leere Menge

Def: 1.3.1 $\emptyset := \{x \mid x \neq x\}$ leere Menge

$= \{ \}$ (auch leere Menge)

Bsp: die Menge aller rechtwinkligen gleichseitigen Dreiecke

Teilmenge

Def 1.3.2 $A \subseteq B \Leftrightarrow$ (A ist Teilmenge von B)

B enthält A

B ist Obermenge von A

ist definiert dass

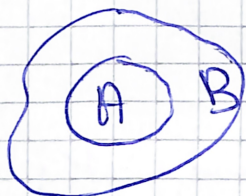
2

$$A \subseteq B : \Leftrightarrow \bigwedge_x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

1
6

$$\text{Bsp.: } \{12, 1\} \subseteq \{12, 7, 1\}$$

~~1~~



Venn - Diagramm

$$\text{Def 1.3.3 } A = B : \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$\text{Satz 4 1.3.4 } \bigwedge_A A \subseteq A$$

(A ist Teilmenge von sich selbst)

$$\bigwedge_n \emptyset \subseteq M$$

$$\text{Def 1.3.5 } A \subset B : \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B \quad (A \text{ ist echte Teilmenge von } B)$$

$$\text{Bsp.: } \{12, 7\} \subset \{12, 1, 7\}$$

Def 1.3.6

Elemente von Mengen können selbst Mengen sein

- Die sog. Potenzmenge P_A einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A

$$P_A := \{ B \mid B \subseteq A \}$$

↑
Eigenschaft

↑
Teilmenge

Bsp: ~~11~~

$$A = \{7, 12, 13\}$$

$$P A = \left\{ \{7\}, \{12\}, \{13\}, \{7, 12\}, \{7, 13\}, \{12, 13\}, \{7, 12, 13\}, \emptyset \right\}$$

2^3 ist die Potenzmenge

Warnung:

$$\emptyset = \{\emptyset\}$$

↖
diese (Leermenge)
hat kein Element

↗
diese hat eins
(sich selbst)

Mengenoperationen:

Def 1.3.7:

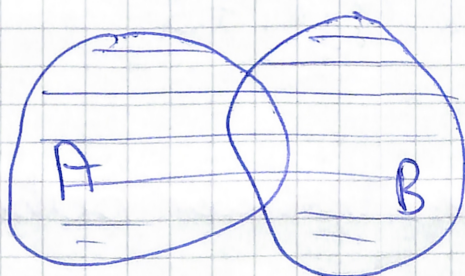
Vereinigung

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

↖
Vereinigung

Vereinigung von A u B

A vereinigt mit B



$$\overline{\overline{A \cup B}}$$

Durchschnitt

Def 1.3.8

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

↖
Durchschnitt von A u B
Schnittmenge A u B



$A \cap B$ (A geschnitten B)

Mengenlehre

Georg Cantor (1845-1918)

- "Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von wohldefinierten und wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen."

- Eine wohldefinierte Gesamtheit unterscheidbarer Elemente heißt eine Menge

- für Mengen wählt man große Buchstaben $A, B, C, \dots$
- für Elemente wählt man kleine Buchstaben $a, b, c, \dots$
($\alpha, \beta, \gamma, \dots$)
- Gehört das Element a zur Menge A , so wird durch $a \in A$ (sprich: a Element A) abgekürzt

— $x \in M \rightarrow x$ ist Element von M

$\Rightarrow$ Zur Darstellung von Mengenoperationen werden oft x gehört zu M
Vom x liegt in M verwendet

— $x \notin M$ x ist nicht Element von M oder Venn-Diagramm

Aufzählung von Elementen

$$A = \{a, b, c, \gamma, z\}$$

Ein Element kann in einer Menge durch Mehrfachzählung öfter als einmal auftreten. Es zählt jedoch nur als ein Element.

$$\text{z.B.: } x \in M \{7, 1, 12\} = \{12, 7, 1\} = \{7, 12, 7, 1, 12\}$$

→ Die Anzahl der unterscheidbaren Elemente einer Menge

A wird mit deren Mächtigkeit bezeichnet und mit $n(A)$ abgekürzt
BSB: $A = \{a, b, a, c, a, d\} \rightarrow n(A) = 4$

Beschreibung

$A = \{ a \mid \text{umfassende eindeutige Beschreibung des Elements } a \text{ als Stellvertreter für alle Elemente} \}$

Spezielle Mengen

Die leere Menge $\emptyset$ enthält kein Element

$$\begin{aligned}\emptyset &:= \{ x \mid x \neq x \} \text{ leere Menge} \\ &= \{ \} \text{ leere Menge}\end{aligned}$$

Die Universalmenge Ω ist die umfassende Menge, die alle Elemente enthält

$$\mathbb{N} = \{ n \mid n \text{ ist eine natürliche Zahl} \} = \{ 1, 2, \dots \}$$

$$\mathbb{Z} = \{ z \mid z \text{ ist eine ganze Zahl} \} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2 \}$$

Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen A und B heißen gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten ($A = B$)

$$\text{BSP: } A = \{ 1, -1, \sqrt{1} \}$$

$$B = \{ x \mid x^2 - 1 = 0 \}$$

$$A = B = \{ -1, 1 \}$$

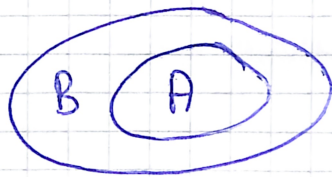
$$A = \{ a \mid a \text{ Buchstabe des Namens ANETTE} \}$$

$$B = \{ b \mid b \text{ Buchstabe in TANTE} \}$$

Bei den Buchstabenmengen unterscheiden sich nur durch Mehrfachaufzählungen und sind daher gleich: $A = B$

Teilmengen

Wenn alle Elemente der Menge A auch in der Menge B enthalten sind schreibt man $A \subseteq B$



Venn / Venid - Diagramm

- A ist Teilmenge von B
- B enthält A
- B ist Obermenge von A

Elemente einer Menge können selbst Mengen sein.

Die sog. Potenzmenge P_A einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A

$$P_A := \{ B \mid B \subseteq A \}$$

Zu den Teilmengen von A gehört sowohl die leere Menge $\emptyset$ als auch die Menge A selbst

$$A = \{ a \mid a \text{ ist ein Buchstabe des Namens ANNE} \}$$

$$A = \{ A, N, E \}$$

$$P(A) = \{ \emptyset, \{A\}, \{N\}, \{E\}, \{AN\}, \{AE\}, \{NE\}, \{ANE\} \}$$

Potenzmenge 2^3

ACHTUNG

$$\emptyset = \{ \emptyset \}$$

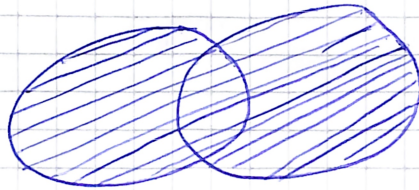
Diese Leermenge hat kein Element

Diese Menge hat ein Element (sich selbst)

Mengenoperationen:

Vereinigung oder die Vereinigungsmenge zweier Mengen A und B enthält alle Elemente, die entweder in A oder in B oder in beiden Mengen enthalten sind

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

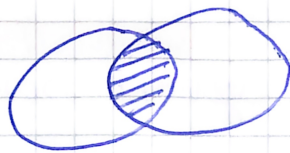


Vereinigung von A u B

$A \cup B$

Durchschnitt oder die Durchschnittsmenge zweier Mengen A und B enthält alle Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind

Man schreibt $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



$A \cap B$ (A geschnitten B)

Aussagenlogik

Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch

¬ Negation

$$\neg A \text{ oder } \bar{A}$$

∧ Konjunktion

$$A \wedge B$$

∨ Disjunktion

$$A \vee B$$

→ Implikation

$$A \rightarrow B$$

; Voraussetzung (Prämisse) →
Schlussfolgerung (Konklusion)

↔ Äquivalenz

$$A \leftrightarrow B$$

wenn A dann B und umgekehrt

Allaussagen und Existenzaussagen

Quantoren:

∧ Allquantor

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} [(x+1)(x-1) = x^2 - 1]$$

∨ Existenzquantor

$$\bigvee_{x \in \mathbb{R}} [x \in \mathbb{V} [x^2 + 3 = 4x]]$$

Kommen in einer Aussageform mehrere Variablen vor, so können einige dieser Variablen - oder sogar alle - durch Quantoren gebunden werden. Dabei kommt es aber in vielen Fällen auf die Reihenfolge der Quantoren an.

Quantoren dürfen also im allgemeinen nicht vertauscht werden.

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{N}} \bigvee_{y \in \mathbb{Z}} (x - y = 2)$$

?

Kommutativgesetz :

$$A \vee B = B \vee A$$

Assoziativgesetz :

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

Distributivgesetz :

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Regeln von de Morgan :

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$

Die vollständige Induktion

→ Blaise Pascal 1623-1662

Das Prinzip der vollständigen Induktion kann immer dann genutzt werden wenn eine Aussage funktional von einer natürlichen Zahl abhängt und die Behauptung für ein allg. K bewiesen werden soll.

Sie vollzieht sich stets in drei Schritten:

● Induktionsanfang

Es wird gezeigt, dass die Aussage für ein spezielles K gilt, meistens für ein kleines K , z.B. für $K=1$ oder $K=2$

Induktionsvoraussetzung

Es wird angenommen, die Aussage gelte für ein allgemeines

● $K=m$

Induktionsschluss

Mit Hilfe von Ableitungen wird von der Induktionsvoraussetzung auf die Gültigkeit der Aussage für $K=m+1$ geschlossen.

Beispiel: Es soll bewiesen werden

$$A(k) : 1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Induktionsanfang

Die Aussage gilt offensichtlich für $k=1$

$$A(1) \quad 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

Induktionsannahme

Die Aussage gelte für $k=m$

$$A(m) \quad 1+2+3+\dots+m = \frac{m(m+1)}{2}$$

Induktionsschluß

$$\Leftrightarrow 1+2+3+\dots+m+(m+1) = \frac{m \cdot (m+1)}{2} + (m+1) =$$

$$= (m+1) \cdot \left(\frac{m}{2} + 1 \right) = (m+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (m+2) =$$

$$\frac{(m+1) \cdot (m+2)}{2} \Leftrightarrow A(m+1)$$

qed.

Der indirekte Beweis

Beim indirekten Beweis wird gezeigt dass die gegen-
teilige Annahme der zu beweisenden Aussage zu
einem Widerspruch (Kontradiktion) führt, daß
also die Annahme falsch ist. Das Standardbeispiel
der Literatur ist das folgende:

Beispiel:

Sei:

$$z = \sqrt{2}$$

zu beweisen ist:
„2 ist irrational“

Statt dessen wird angenommen:

$\neg A$: „2 ist rational“

- Aus der Annahme soll ein Widerspruch abgeleitet werden, wozu eine Folge tautologischer Implikationen und Äquivalenzen benutzt wird.

Aus der Annahme $\neg A$ „2 ist eine rationale Zahl“
folgt:

2 ist mit Hilfe teilerfremder natürl. Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$
mit $n \neq 0$ als $z = m/n$ darstellbar.

$$z^2 = 2 = m^2/n^2$$

$$m^2 = 2n^2$$

$\hookrightarrow$ als gerade Quadratzahl ist
 m^2 durch 4 teilbar, d.h.,
 m ist durch 2 teilbar.

$$m^2 = 2n^2 = 4k$$

$n^2 = 2k$ ist durch 2 teilbar
 $\Rightarrow n$ ist durch 2 teilbar

m^2 durch 4 teilbar

n^2 — " —

n durch 2 teilbar

Dies widerspricht der Annahme, denn wäre $z = \sqrt{2}$ eine rationale Zahl, so gäbe es teilerfremde natürl. Zahlen m und n so dass $z = \sqrt{2} = m/n$ gelten würde

Die Schlussfolgerung zeigt jedoch dass m und n bei dieser Darstellung einen gemeinsamen Teiler 2 haben müssen

Logisch kann daraus gefolgert werden, daß die Annahme falsch ist; richtig ist das Gegenteil $z = \sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl

Das Verfahren der „vollständigen Induktion“

$A(n) : S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

nicht allgemeingültig

Forderungsaussage $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ (für $n \in \mathbb{N}$)

Kürzen wir $A(n+1)$ durch $B(n)$ ab, so lautet diese Beziehung

$$A(n) \Rightarrow B(n)$$

$$L(A) \subseteq L(B)$$

Dies bedeutet: wenn eine nat. Zahl zu $L(A)$ gehört, so gehört sie auch zu $L(B)$

Immer wenn $A(n)$ erfüllt ist, ist auch $A(n+1)$ erfüllt

Es ist:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Wir haben also zu zeigen, daß unter dieser Voraussetzung auch $A(n+1)$ erfüllt ist, daß also dann auch gilt:

$$S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$$

Mathematische Beweisverfahren

⇒ aus wahren Prämissen ergeben sich stets wahre Konklusionen

⇒ Beim mathematischen Beweis handelt es sich um eine Ableitung von Schlußfolgerungen, deren Wahrheitswerte immer wahr sind, aus vorausgegangenen Sätzen, die als wahr erkannt sind (Voraussetzungen, Prämissen). Dabei kann man direkt oder indirekt vorgehen.

⇒ Man beachte dass sich keine Aussage mit einem oder mehreren Beispielen beweisen lässt, und sie es noch so viele.

BSP: Aussage A: „Jede ungerade Zahl größer 1 ist eine Primzahl.“

A ist wahr für 3, 5, 7

→ also ist A immer wahr!

⇒ Diese Schlussfolgerung ist unstatthaft

Jedoch kann man die Aussage mit einem Gegenbeispiel widerlegen

A ist falsch für 9

→ daher ist die Aussage falsch

Die Allgemeingültigkeit einer Aussage kann nur durch einen Beweis gezeigt werden. Die drei wichtigsten Beweistechniken:

Der direkte Beweis:

Beim direkten Beweis wird die Schlussfolgerung mit Hilfe „tautologischer Folgerungen“ direkt aus den Voraussetzungen mit dem Wahrheitswert wahr abgeleitet. Die Satzaussage gilt als bewiesen, wenn jeder Beweisschritt in Form einer logischen Aussage, in einer Wahrheitstafel ausgewertet, am Ende in allen Kombinationen wahr ergibt.

BSP: Zeige, daß $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ gilt

Wir gehen von einer wahren Voraussetzung des Distributivgesetzes für reelle Zahlen aus:

$$a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$\hookrightarrow (a+b) \cdot (a-b) = a \cdot (a-b) + b \cdot (a-b)$$

$$\hookrightarrow (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

$$\hookrightarrow (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Alle Umformungen sind tautologische Äquivalenzen, so daß die zu beweisende Aussage gültig ist.