

Kettenregel

$$e^{\ln x} = x \Rightarrow e^{\ln x} (\ln x)' = 1 \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$e^{\ln x} = x^\alpha \Rightarrow e^{\ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} \cdot \frac{d}{dx} = (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

[innere Ableitung $\cdot$ äußere Ableitung]

Satz 6.3.9 $f(x) = x^\alpha \Rightarrow f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$

Bem: $x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (\alpha \notin \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{Z})$

BSP: $f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = \cancel{x \cdot x^{x-1}} = x^x$

$$\ln f(x) = x \ln x \Rightarrow \frac{1}{f(x)} f'(x) = \ln x + 1$$

$$f'(x) \Rightarrow x^x (1 + \ln x)$$

$[u(x)]^{v(x)} \rightarrow$ bilden (wie oben)

$$(u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right]$$

6.3.10 höhere Ableitungen

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d f'(x)}{dx}, \quad \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}} = \frac{d \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)}{dx}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'$$

6.3.11 Ableitung der Umkehrfunktion

f an x differenzierbar, $f'(x) \neq 0$ ^{ungleich 0 in einer Umgebung}

f in $U(x)$ umkehrbar

$$\bigwedge_{x \in U(x)} f^{-1}(f(x)) = x \xrightarrow{KR} f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$
$$\Rightarrow f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)} \Big|_{x=f^{-1}(y)}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

BSP: 1. $y = e^x \rightarrow$ (streng monoton wachsend)

$$x = \ln y$$

$$\frac{d \ln y}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

2. $y = \tan x \rightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$

Umkehrfunktion $\tan \rightarrow \text{Arc tan } y$

$$\frac{d \text{Arc tan } y}{dy} \stackrel{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

Das Differential

f an x differenzierbar

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x) \Leftrightarrow f(x+h) - f(x) \underset{|\varepsilon(h)|}{\approx} h f'(x)$$

~~Fehler~~

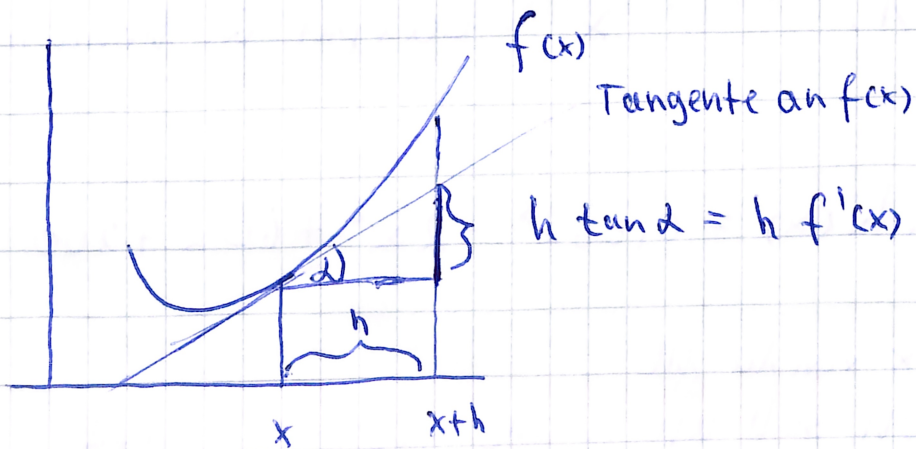
$$\wedge \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

$$\Delta y := f(x+h) - f(x)$$

$$h f'(x)$$

$\varepsilon(h)$ geht schneller
gegen null

h geht gegen null



Def. 6.4.4': Ist eine Funktion f an einer Stelle x differenzierbar, so heisst $df_x := f'(x)h$ das Differential von f an der Stelle x

Bem: 1. $dy = df(x)$ 2. $dy = dy(x, h)$

(Das Differential ist abhängig von $f(x), x, h$)

$$\Delta y = dy + h \varepsilon(h)$$

$$\Delta y \approx dy$$

h ist eine feste Zahl

$$y = f(x) = x \Rightarrow dy = 1 \cdot h = dx$$

$$dy = f'(x) \cdot dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Def 6.4.2: Unter dem Differentialquotient einer differenzierbaren Funktion ~~f(x)~~ F an einer Stelle x versteht man den Quotienten der beiden Differentiale dy und dx : $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{d(x)} = f'(x)$

BSP: 1. x = Output in Mengeneinheiten

$$\text{Kostenfunktion: } K(x) = 0,06x^3 - 2x^2 + 60x + 200$$

- Output x von 10 ME
- Produktion soll um 2 ME ausgewertet werden (erweitert werden)
- Berechnung über das Differential der Kostenänderung

$$dK(x) = (0,18x^2 - 4x + 60) dx$$

$$x = 10 \quad dx = 2$$

$$\begin{aligned} dK &= (1,8 - 40 + 60) \cdot 2 = \underline{\underline{76}} \leftarrow \text{genügt} \\ \Delta K &= K(12) - K(10) = 75,2 \end{aligned}$$

$$x = 10 \quad dx = -1$$

$$dK = -38$$

$$\Delta K = K(9) - K(10) = -38,2$$

BSP 2:

Kreis, Radius r

- Radius vergrößert sich um 1%
- desh. vergrößert sich die Fläche

$$dF = 2\pi r \quad ; \quad dr = 0,01 r$$

$$= 2\pi r \cdot 0,01 r$$

$$= 0,02 \pi r^2$$

$$\frac{dF}{F} = 0,02$$

factsächliche / wirkliche Änderung

$$- \frac{\Delta F}{F} = \frac{\pi \cdot 1,01 r^2 - \pi r^2}{\pi r^2} = 0,0201$$

$$\begin{array}{r} 1,01 \cdot 1,01 \\ = 1,01 \cdot 1,01 \\ \hline 1,0201 \end{array}$$

$$= 0,0201$$

BSP 3:

$$\sqrt{1300} = \sqrt{36^2 + 4}$$

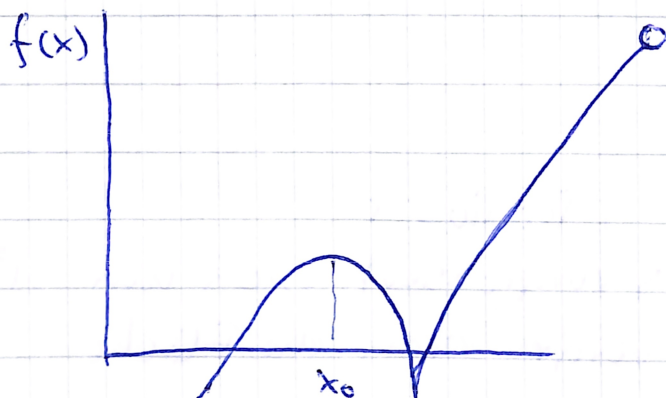
$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{1300} \approx 36 + 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot 36}$$

$$\sqrt{1300} \approx 36,0555$$

Extremwerte, Monotonie, Krümmung Wendepunkt



x_0 Max in einer Umgebung (relatives Max)

ist die Funktion in a nicht bestimmt
gibt es kein absolutes Max, sondern
nur ein relatives

Def 6.5.1. Eine auf einem Intervall J
definierte Funktion f hat genau dann an
 $x_0 \in J$ ein relatives (lokales) ^{Max}
gilt: $\forall \delta > 0 \quad x \in U_\delta(x_0) \cap J \Rightarrow \begin{matrix} \text{min} \\ f(x) \leq f(x_0) \\ f(x) \geq f(x_0) \end{matrix}$ wenn

Bem: 1. Strenges relatives Extremum
dann $f(x) > f(x_0)$ (echt kleiner)
- Parallele ist ausgeschlossen

absolutes Extremum (Max) für alle
 x muss gelten $\rightarrow$ keine Einschränkung

Satz 5.2.4: Hat eine Funktion an einer Stelle x_0 differenzierbare Funktion dort ein lokales Max, folgt: $f'(x_0) = 0$

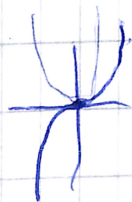
Bew. rel. Max

$$\left. \begin{array}{l} \text{rechtsseitig} \\ x \in U^r(x_0) \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \\ \text{linksseitig} \\ x \in U^l(x_0) \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \geq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \Rightarrow \\ 0 \geq \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Bem. Die Umkehrung gilt nicht wenn

$$f(x) = x^3$$



Notwendige Bedingung

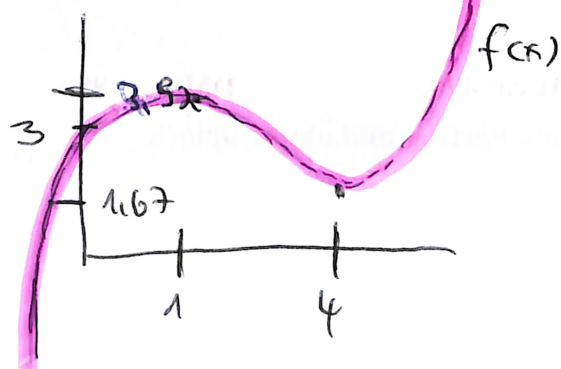
Die Ermittlung relativer Extremwerte ergibt sich wie folgt:

- Zunächst ermittelt man die Lösungen x_i der Gleichung $f'(x) = 0$. Die so ermittelten stationären Stellen sind die einzigen Kandidaten für relative Extrema (besitzt $f'(x) = 0$ keine Lösung, so kann f auch keine relativen Extrema besitzen)
- Dann berechnet man die zweite Ableitung $f''(x)$ und überprüft durch Einsetzen der stationären Stellen x_i das Vorzeichen von $f''(x_i)$ und bestimmt so ~~mal~~ den Typ des Extremums

BSP1

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 2x + 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2 = 0$$



$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

p-q-Formel

$$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}$$

4 und 1 sind Extremstellen

$$f''(x) = x - 2.5$$

$f''(1) = 1 - 2.5 < 0$ also hat f in $x_1 = 1$ ein relatives max
 $f(x) \approx 3.92$ (1 in $f(x)$ ein)

$f''(4) = 4 - 2.5 > 0$ also hat f in $x_2 = 4$ ein rel. min
 $f(x) = 1.67$