

①

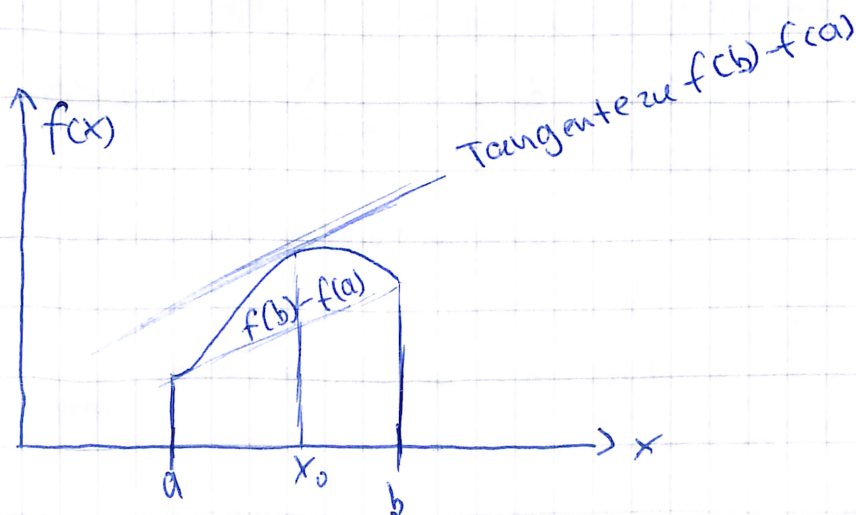
21. Vorlesung 12.01.01

Infinitesimalrechnung

fasst Differentialrechnung und Integralrechnung zusammen

Differential einer Funktion an einer Stelle
(Vollständiges Differential)

Dgg. Kurvendiskussionen

Satz 6.5.3 (MWS): Ist f auf $[a, b]$ diff'bar,
so gibt es (mind.) eine Stelle
 $x_0 \in]a, b[$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ Bew: Beckmann KünziSatz 6.5.4: Ist f auf $[a, b]$ diff'bar und gilt dort $f'(x) = 0$ so ist f auf $[a, b]$ konstant.

MWS = Mittelwertsatz

Bew: oBd. A $x, x_1 \in [a, b] \xRightarrow{\text{MWS}} \bigvee_{x_0 \in]x, x_1[} f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$

f' nach Vor. = 0

$x \neq x_1$ Zähler muss null sein
 $\Rightarrow f(x) = f(x_1)$

Satz 6.5.5: Eine auf einem Intervall J diff'bare Funktion f ist auf J genau dann monoton wachsend und monoton fallend

wenn gilt: $\bigwedge_{x \in J} f'(x) \geq 0$

Bew: 1. z.z. $\bigwedge_{x \in J} f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ auf J mon. w.

(hinreichende Bedingung)

$x_1, x_2 \in J, x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{MWS}} \bigvee_{x_0 \in]x_1, x_2[} f'(x_0) \geq 0$

$\bigvee_{x_0 \in]x_1, x_2[} f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$

$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

2. z.z. f auf J monoton wachsend

$$\Rightarrow \bigwedge_{x \in J} f'(x) \geq 0 \quad (\text{notwendig})$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

man muss den Differenzenquotienten bilden

$$0 \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \xrightarrow{x_2 \rightarrow x_1} f'(x_1)$$

Bem: $f'(x) \geq 0$ auf $J \Rightarrow f$ echt monoton wachsend auf J

$\nLeftarrow$ (nicht möglich)

$f(x) = x^3$
Ableitung $3x^2$ (nicht monoton wachsend)

Def 6.5.6: Der Graph einer auf J diff'baren Funktion heißt genau dann

Konvex links /
Konkav rechts gekrümmt, wenn f' auf J

monoton wächst (Tangenten)
fällt.

Satz 6.5.7. Ist f auf J zweimal differenzierbar, so ist der Graph von f genau dann ^{links} gekrümmt wenn gilt:

Krümmung
ist ein
Globaler
Begriff

$$\bigwedge_{x \in J} f''(x) \geq 0.$$

(Vorzeichen muss gleich bleiben)

Bew: $\bigwedge_{x \in J} f''(x) \geq 0 \iff_{6.5.5} f' \text{ auf } J \text{ monoton w.}$

$\iff_{6.5.6}$ Graph der Funktion auf J
links gekrümmt.

Satz 6.5.8: Ist f an x_0 zweimal differenzierbar und gilt
 $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0$ so hat f an x_0 ein ^{Max} rel.
 $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0$ ^{Min}

~~Wahrheitswert.~~

Bew: $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ in $U(x_0)$ ist f' str.
monoton fallend

$$\text{d.h. } (f'(x_0) = 0) \quad \begin{matrix} \text{für } x \in U(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x \in \tilde{U}(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0 \end{matrix}$$

②

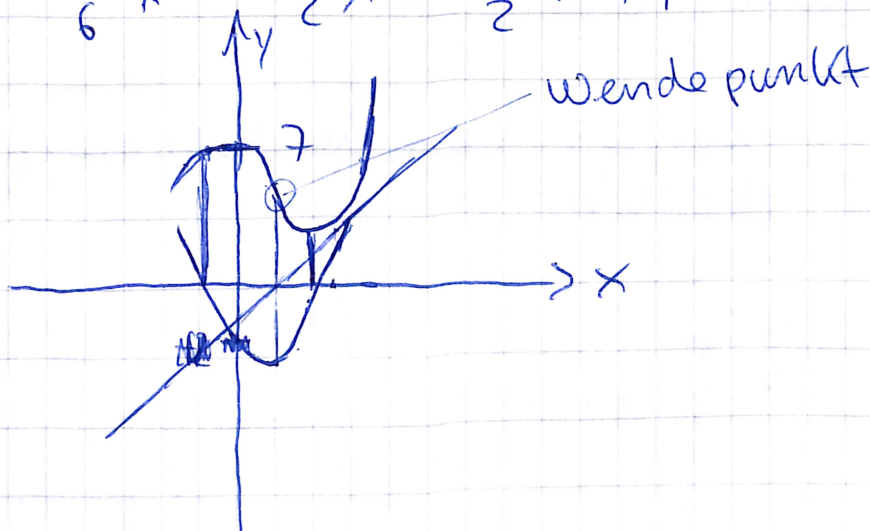
d.h. für $x \in U^l(x_0) : f$ wächst } flach an x_0
 $x \in U^r(x_0) : f$ fällt } ein rel. Max.

Bem. Die Bed. ist nur hinreichend nicht notwendig

$$f(x) = x^4$$

$$f''(x) = 12x^2 \quad \text{min (nicht rel.)}$$

BSP: $y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 7$



$$y' = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$$

$$y'' = x - 1$$

Def: 6.5.9

Der Graph einer Funktion f hat an einer Stelle $x_w \in D(f)$ genau dann eine Wendestelle wenn rechts und links von x_w entgegengesetztes Krümmungsverhalten vorliegt. Der zugehörige Punkt $P = (x_w, f(x_w))$ heißt Wendepunkt.

Satz 6.5.10: Ist f an ~~der~~ einer Wendestelle x_w zweimal diff'bar, so gilt:
 $f''(x_w) = 0$

Bew.: o.B.d.A.

links von der Wendestelle x_w Rechtskr.
rechts - " - x_w links

$\Rightarrow f''$ dort $\searrow$
 $\Rightarrow f'$ $\nearrow$ } $\Rightarrow f'$ hat an x_w ein $\Rightarrow$
lokales Min 6.5.2

$$f''(x_w) = 0$$

Bem Die Bed. ist notw. aber nicht hinreichend

$$f(x) = x^4$$

Satz 6.5.11: Gilt für eine an x_w dreimal differenzierbare Funktion f $f''(x_w) = 0$ $\wedge$ $f'''(x_w) \neq 0$, so hat der Graph von f an x_w eine Wendestelle

Bew: nach 6.5.8 hat f' an x_w ein relatives Extremum

o.B.d.A ein relatives Min (oder Max)

$\Rightarrow$ links von x_w f' $\searrow$ $\Rightarrow$ $G(f)$ rechts gekr.
rechts $-u-$ f' $\nearrow$ $\xRightarrow{6.5.6}$ links

$\Rightarrow G(f)$ hat an x_w eine Wendestelle

Bedingung ist nur hinreichend nicht notwendig

$$f(x) = x^5$$

Satz 6.5.12

Eine Funktion f ein $U(x_0)$

n -mal stetig diff'bar mit $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

genau dann, falls n gerade und

$$f_{x_0}^{(n)} > 0$$

$$f_{x_0}^{(n)} < 0$$

ist, so hat f an x_0 ein rel. $\begin{matrix} \text{Min} \\ \text{Max} \end{matrix}$

Und wenn n ungerade ist und

$$f_{x_0}^{(n)} \neq 0; \text{ dann hat } f_{x_0}^{(n)} \text{ einen}$$

Wendepunkt.

Bem. Mit Hilfe dieser Sätze lassen
sich in vielen Fällen die rel.
Extrema einer beliebig diff'baren
Funktion bestimmen.

6.6 Kurvendeutungskochen

KD (1)

- ① unter Def. Bereich Krümmen
- ② Symmetrieverhalten ~~Symmetrie~~ Punktsym.
Achsensym/Spiegelsym.
- ③ Achsen Schnittpunkte
- ④ Monotonieverhalten / lokale Extrema
- ⑤ Krümmungsverhalten / Wendepunkte

③

⑥ Verh. im Unendlichen / Pole
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sim \lim_{x \rightarrow -\infty}$

④ Bildbereich (Wertebereich)

⑧ Schaubild / Graph der Funktion

• **BSP** $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - 3x$

(1) $D(f) = \mathbb{R}$

(2) nicht ermittelbar da x^3 u. x^2 in Exponenten

(3) N. St. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 15x = 0$
 $x(x^2 - 2x - 15)$
 $x(x+3)(x-5)$
 $x_1 = 0 \quad x_2 = -3 \quad x_3 = 5$

Ordinatenabschnitt $f(0) = 0$

④ $f'(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - 3 \geq 0$ monoton wachsend $\Leftrightarrow$
 $(x-3)(x+\frac{5}{3}) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x \geq 3 \wedge x \geq -\frac{5}{3}) \vee (x \leq 3 \wedge x \leq -\frac{5}{3})$

f str. monoton wachsend

and $[3, \infty]$

$]-\infty, -\frac{5}{3}[$

