

22. Vorlesung 17.01.01

$$f(x) = a \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - 3x$$

$$f'(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - 3$$

$$f''(x) = \frac{6}{5}x - \frac{4}{5}$$

$$f'''(x) = \frac{6}{5}$$

Streng monoton steigend

$$f \nearrow]-\infty, -\frac{5}{3}] \quad [3, \infty[$$

$$\searrow [-\frac{5}{3}, 3]$$

$$\Rightarrow f \text{ hat an } -\frac{5}{3} \text{ ein rel. Max } f(-\frac{5}{3}) = \frac{80}{27}$$

$$\text{an } 3 \text{ rel. Min } f(3) = \frac{36}{5}$$

$$(5) \quad 5 f'' = 6x - 4$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

$$\leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

$$f \text{ auf } [\frac{2}{3}, \infty[$$

links gekrümmt

Intervall unbeschr.
bis $\frac{2}{3}$

$$]-\infty, \frac{2}{3}]$$

Wendestelle an $\frac{2}{3}$ $f(\frac{2}{3})$

rechts gekr.

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{268}{135}$$

6 Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5x} - \frac{3}{5x} \right) \quad \text{Ausklammern der höchsten Potenz}$$

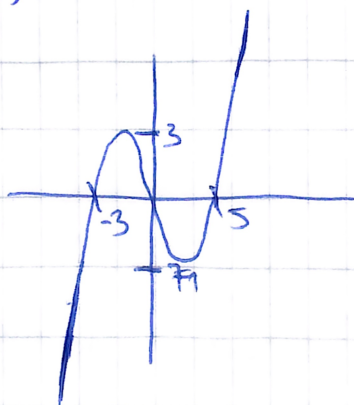
$$" \infty \cdot \frac{1}{5} " = \infty$$

ohne Ausklammern ergäbe:

$$\infty - \infty \quad (\text{nicht definiert})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5x} - \frac{3}{5x} \right) = -\infty$$

x	-3	-1,67	0	0,67	4	5
f(x)	0	2,96	0	-2,12	-5,6	0
f'(x)	4,8	0	-3			



Die Funktion ist an der Wendestelle Punktsymmetrisch

Vermutung $\left(\frac{2}{3} - \frac{286}{135} \right)$
Symmetrie zum Wendepunkt

$$\bar{x} := -\frac{2}{3}x$$

um den Symmetriepunkt im Nullpunkt zu erh.
entweder das Achsenkreuz oder die
Funktion verschieben

$\bar{x}$ $\bar{y}$ neue Koordinatenachsen

• $\bar{x} := x - \frac{2}{3}$ Versch. der Graphen
der x-Achse um $+\frac{2}{3}$ nach links
rechts

$\bar{y} := y + \frac{286}{135}$ Versch. der Graphen
y-Achse um $-\frac{286}{135}$ nach oben
unten

Somit liegt der Wendepunkt /
Symmetriepunkt im Nullpunkt

• ! nach y auflösen!

$$\begin{aligned}\bar{y} - \frac{286}{135} &= \frac{1}{5} \left(\bar{x} + \frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2}{5} \left(\bar{x} + \frac{2}{3}\right)^2 - 3 \left(\bar{x} + \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{5} \left(\bar{x}^3 + 2\bar{x}^2 + \frac{4}{3}\bar{x} + \frac{8}{27}\right) - \frac{2}{5}\bar{x}^2 - \frac{8}{15}\bar{x} - \frac{2}{5}\end{aligned}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{5}\bar{x}^3 - \frac{49}{25}\bar{x}$$

neue Kurve im
neuen Koordinatensystem

da Exponenten mit ungeraden Werten

BSP 2

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

(1) $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

(2) Keine Symmetrie

Keine Nullstellen, da Zähler Null sein müsste
(Null immer positiv)

$$f(0) = -1$$

$$(4) f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \geq 0 \quad \left\| \begin{array}{l} x \geq 1 + \sqrt{2} \\ x \leq 1 - \sqrt{2} \end{array} \right.$$

$f \nearrow$ (wächst
monoton auf
beiden Intervallen)

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$$

$f \searrow$ auf $[1 - \sqrt{2}, 1]$ und auf $]1, 1 + \sqrt{2}]$

$\Rightarrow 1 - \sqrt{2}$ Maximalstelle $(1 - \sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2})$

$\Rightarrow 1 + \sqrt{2}$ Minimalstelle $(1 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$

$$(1 - \sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2}) \quad (1 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

$$\frac{u}{v}$$

$$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

(1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(2) keine Symmetrie

(3) keine NS, da der Zähler nicht null sein kann.
 $f(0) = -1$

(4) $f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1) \cdot 1}{(x-1)^2}$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)-1}{(x-1)^2} \quad \frac{u}{v} \quad \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Extremwerte

$$= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-1) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x-1) \cdot 2}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2 = 2x - 1$$

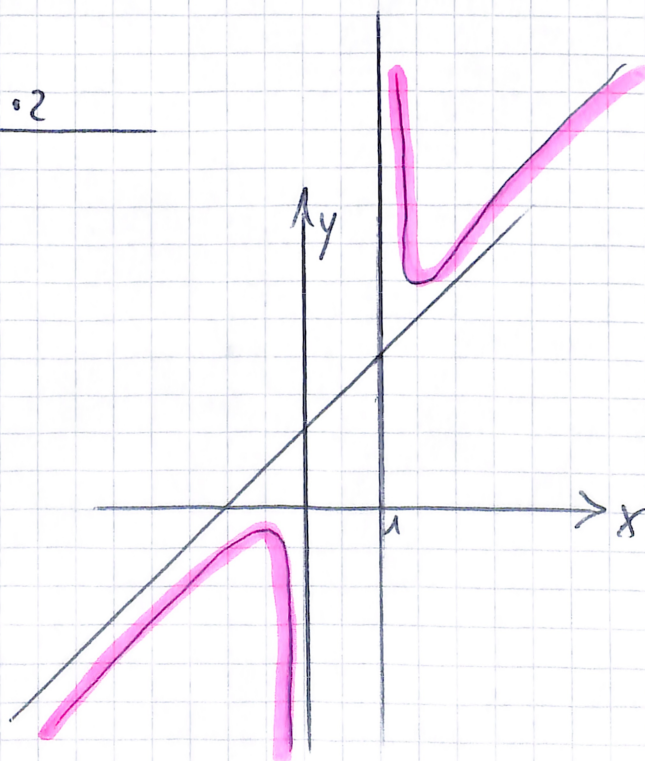
$$1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$$

$$f(x) \searrow$$

max
rechts

$$f(x) \nearrow$$

min
links



$$f''(x) = \frac{(2x-1)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^3}$$

Kürzen durch $(x-1)$

$$f''(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x + 2 - 2x^2 + 4x + 2}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{4}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow x < 1$$

g(f) links gekrümmt
rechts

$1 \notin D(f)$ Keine Wst

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2+1}{x-1} = \infty$$

Pole an $x=1$ der Ordnung 1

Def 6.6.1 Eine Funktion f hat an einer Unendl. KtsStelle a genau dann einen Pol der Ordnung n , wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^n f(x) = c \neq 0.$$

$$f(x) = \frac{(x^2+1): (x-1) = x+1 + \frac{2}{x-1}}{x^2-x} \quad \nearrow \begin{matrix} 0 \\ x \rightarrow \infty \end{matrix}$$

für grosse $x \Rightarrow$ Asymptote

Def 6.6.2 Eine Funktion f heißt genau dann Asymptote einer Funktion f , wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - f_A(x)) = 0 \vee \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - f_A(x)) = 0$$

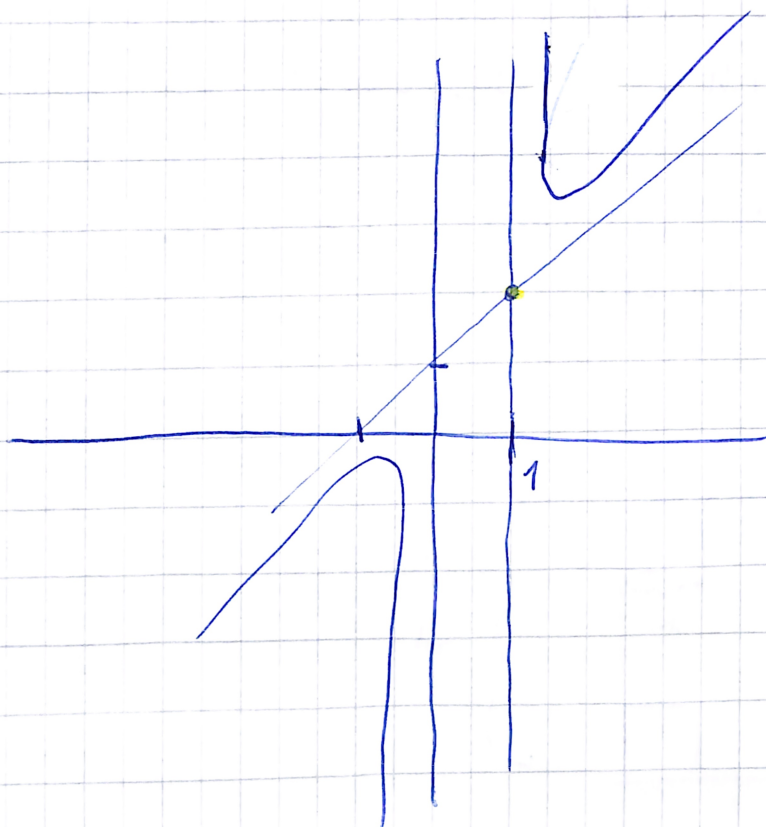
Eine Gerade $x=a$ heißt genau dann senkrechte Asymptote einer Funktion f , wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty \vee \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$$

Batt 2

(7) B(f)

x	-4	-3	-2	-1	-0,4	0	0,5	1,5	2
f(x)	-3,4	-2,5	-1,7	-1	-0,8	1	-2,5	6,5	



Symmetriezentrum (1 | 2)

Durch transformieren erfolgt

$$x-1=\bar{x}$$

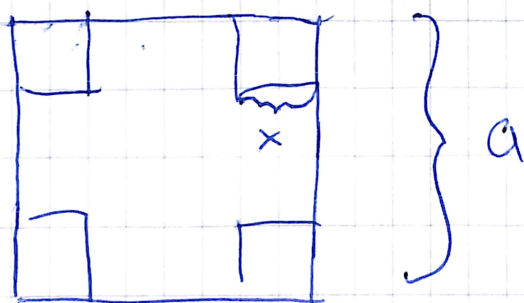
$$y-2=\bar{y}$$

$$\bar{y} = \bar{x} + \frac{2}{\bar{x}}$$

an der Funktionsgleichung
sieht man dass die
Funktion ungerade
ist.

Extremwertaufgaben

Aus einer quadratischen Fläche mit der Grundlänge a sollen an den Ecken kongruente Quadrate abgeschnitten werden, so dass aus der Restfläche eine Schachtel mit möglichst grossem Inhalt gefertigt werden kann.



Klausur

Volumen V

$$V(x) = (a - 2x)^2 x = a^2 x - 4ax^2 + 4x^3$$

$$D(V) = \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$$

$$V'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2$$

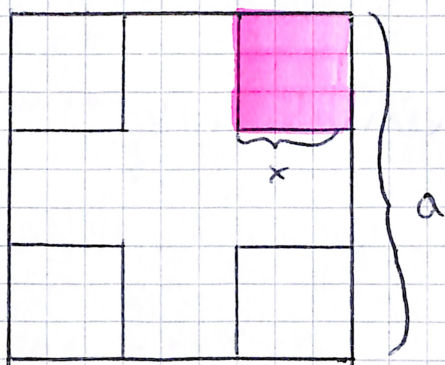
$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}ax + \frac{a^2}{12} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{3} + \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{12}} \quad \vee \quad x = \frac{a}{3} - \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{12}}$$

$$x = \frac{a}{3} + \frac{a}{6} = \frac{a}{2} \quad \vee \quad x = \frac{a}{3} - \frac{a}{6} = \frac{a}{6}$$

Extremwertaufgaben

Aus einer quadratischen Fläche mit der Grundlänge a sollen an dem Ende kongruente Quadrate abgeschnitten werden, so dass aus der Restfläche eine Schachtel mit möglichst grossem Inhalt gefaltet werden kann.



Volumen V

$$V(x) = (a - 2x)^2 x = a^2 x - 4ax^2 + 4x^3$$

$$D(V) = \left\{ 0 < x < \frac{a}{2} \right\}$$

$$V'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2$$
$$x^2 - \frac{2}{3}ax + \frac{a^2}{12}$$

$$x_1 = \frac{a}{3} + \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{12}}$$

$$x_2 = \frac{a}{3} - \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{12}}$$

P-q-Formel: $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

$$= \frac{a}{3} + \frac{a}{6} = \frac{a}{2} \quad \checkmark$$
$$= \frac{a}{3} - \frac{a}{6} = \frac{a}{6}$$

$$V''(x) = -8a + 24x$$

$$V''\left(\frac{a}{2}\right) = +4a > 0 \quad \text{min}$$

$$V''\left(\frac{a}{6}\right) = -4a < 0 \quad \text{max}$$

Das absolute Max ist gesucht

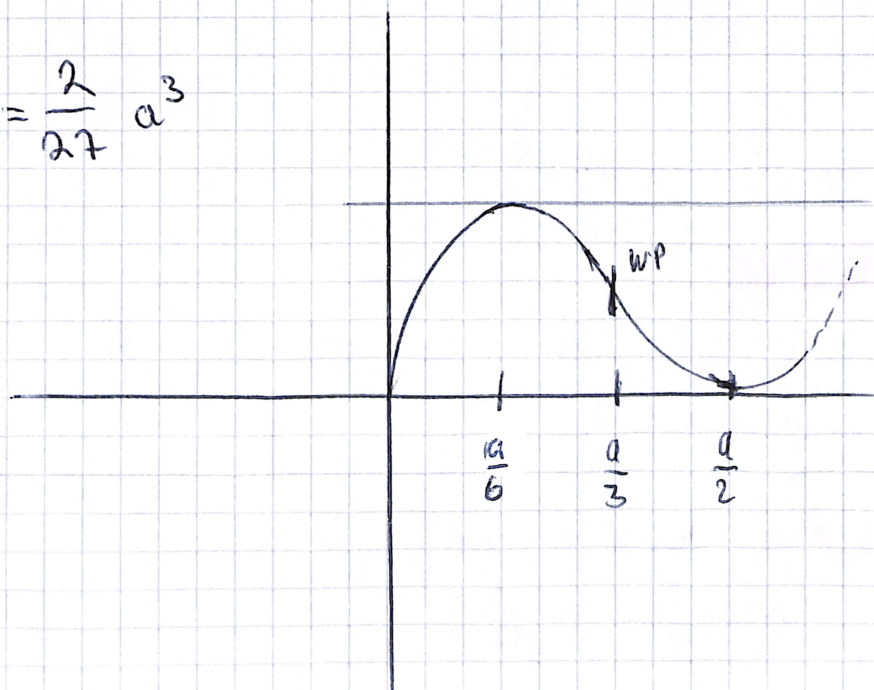
Zur dem Grenzwert des Definitionsbereiches kann noch ein Max liegen

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} V(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{a}{2} - 0} V(x) = 0$$

also ist das relative Max ein absolutes!

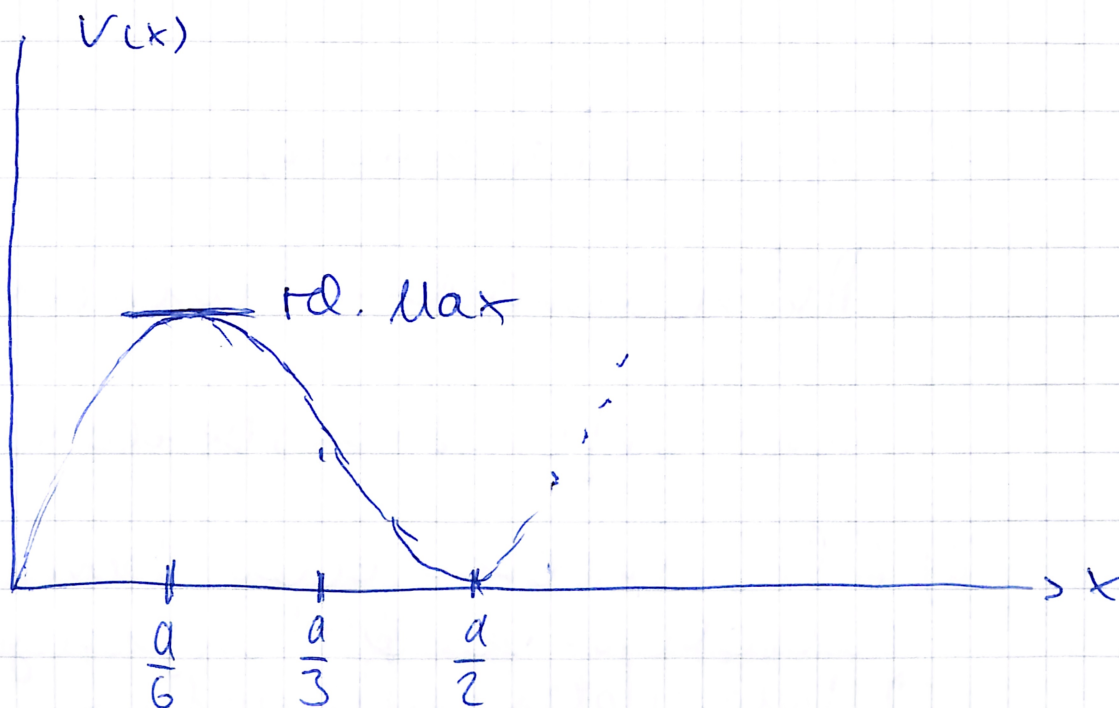
$$V = \frac{a}{6} = \frac{2}{27} a^3$$



Blaß 3

$$V''(x) = -8a + 24x$$

$$V''\left(\frac{a}{2}\right) = 4a > 0 \quad V''\left(\frac{a}{6}\right) = -4a < 0$$



rel. Max bei $\frac{a}{6}$

absolutes Max ist gesucht

In den Grenzen des Definitionsbereiches kann noch ein Max liegen

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} V(x) = 0$$

$$x \rightarrow 0+0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{a}{2}-0} V(x) = 0$$

also ist das
relatives Max
ein Absolutes

$$V = \frac{a}{6} = \frac{2}{27} a^3 \quad \text{Maximale Volumen!}$$

1) Bild / Zeichnung

Aufstellung der Funktionsgleichung
und Definitionsbereich

2) Eliminieren einer Variablen
durch Nebenbedingungen falls
2 Variablen auftauchen

3) Bestimmung der rel. Extrema

4) Best. der Absoluten Extrema
Extremum.