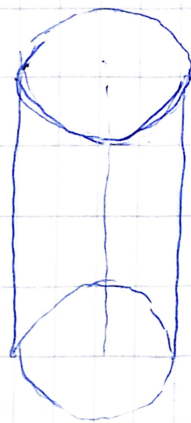


Aufg 60

gesucht ist ein gerader Kreiszylinder



$$V(r, h) = \pi r^2 h$$

$$\sigma(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$(0 \leq r, h)$$

eine Variable muss eliminiert werden

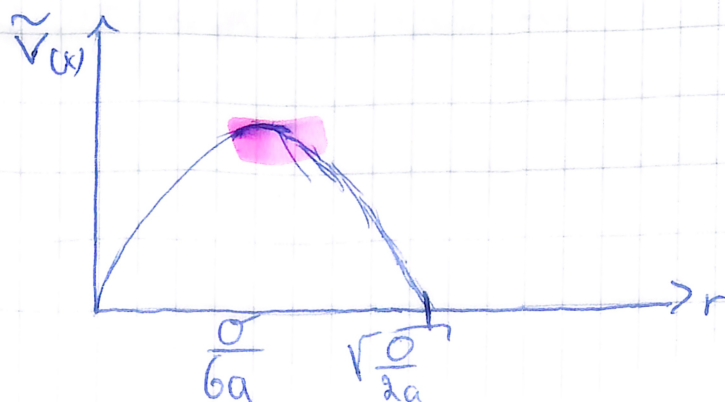
(auflösen nach h)

Tilde

$$\tilde{V}(r) = \pi r^2 \frac{\sigma - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{\sigma}{2} r - \pi r^3$$

$$\tilde{V}'(r) = \frac{\sigma}{2} - 3\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{\sigma}{6\pi}}$$

$$\tilde{V}''(r) = -6\pi r \leq 0$$



rel. und abs. Max

Ausrechnung der Höhe

$$h = \frac{\sigma - 2\pi \frac{\sigma}{6\pi}}{2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{6\pi}}} = \frac{\sigma}{\pi 3 \sqrt{\frac{\sigma}{6\pi}}} \\ = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{6\pi}} = 2r$$

Durchmesser . Höhe gleich groß

$$V_{\max} = \pi \frac{\sigma}{6\pi} \cdot 2 \sqrt{\frac{\sigma}{6\pi}} = \frac{\sigma}{3} \sqrt{\frac{\sigma}{6\pi}}$$

ganzzrationale Funktionen mit vorgeg.
Eigenschaften

Der Graph eines Polynoms 3. Grades geht durch den Ursprung. Die Tangente im Wendepunkt liegt bei $(2, 1)$ hat die Steigung $-\frac{3}{2}$

Polynom 3. Grades $ax^3 + bx^2 + cx + d$

x soll nicht bestimmt werden / lediglich a, b, c, d

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$(1) \quad f(0) = 0$$

$$\text{also } d = 0$$

$$(2) \quad f(2) = 1$$

$$\text{also } 8a + 4b + 2c = 1$$

$$(3) \quad f'(2) = -\frac{3}{2}$$

$$\text{also } 12a + 4b + 2c = -\frac{3}{2} \quad | \cdot (-2) \mp$$

$$(4) \quad f''(2) = 6$$

$$\text{also } 12a + 2b = 6 \quad | : 2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} -16a - 4b = 4 \end{array} \right\} a = \frac{1}{2}$$

$$b = -3$$

$$c = \frac{9}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$$

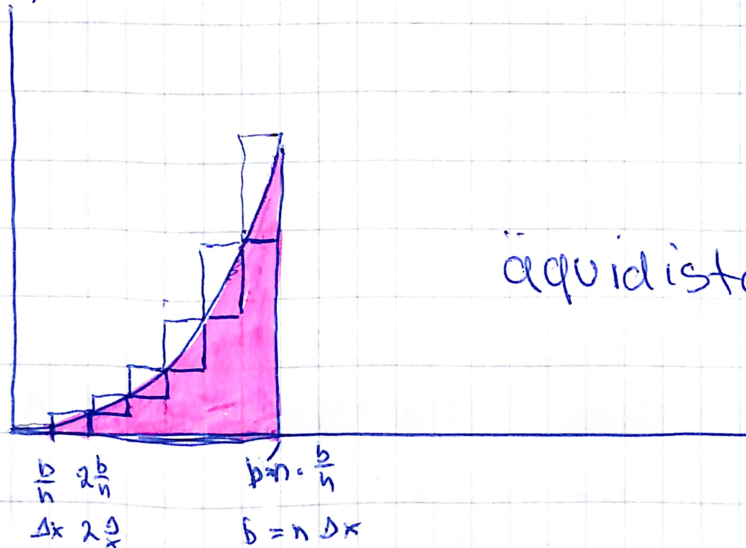
7. Integralrechnung

7.1. Das ~~best~~ bestimmte Integral

Problem: Flächeninhalt von
krümmenliniig begrenzten Flächen

BSP

$$f(x) = x^2$$



äquidistant (in n -Teile zerlegen)

Untersumme

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \left(2\frac{b}{n}\right)^2 + \dots + \frac{b}{n} \left((n-1)\frac{b}{n}\right)^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \end{aligned}$$

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Übung

$$= \frac{b^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{b^3}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{3}$$

nachträglich

Gesucht ist ein Kreiszylinder



$$V(r, h) = \pi r^2 h$$

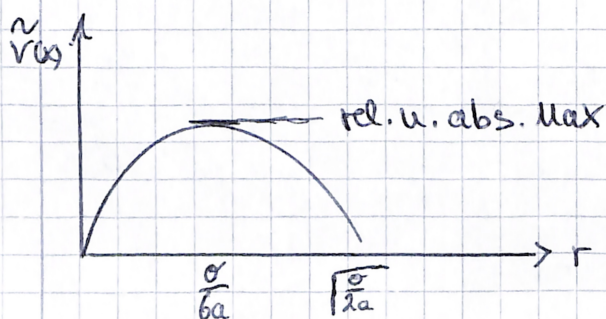
$$\sigma(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad (0 \leq r, h)$$

Eine Variable muss eliminiert werden (auflösen nach h)

$$\tilde{V}(r) = \pi r^2 \frac{\sigma - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{\sigma}{2} r - \pi r^3$$

$$\tilde{V}'(r) = \frac{\sigma}{2} - 3\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{\sigma}{6\pi}}$$

$$\tilde{V}''(r) = -6\pi r \leq 0$$



Ausrechnung der Höhe

$$h = \frac{\sigma - 2\pi \frac{\sigma}{6\pi}}{2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{6\pi}}}$$

$$= \frac{\sigma}{\pi 3 \sqrt{\frac{\sigma}{6\pi}}}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{\sigma}{6\pi}} = 2r$$

$$V_{\max} = \pi \frac{\sigma}{6\pi} \cdot 2 \sqrt{\frac{\sigma}{6\pi}} = \frac{\sigma}{3} \sqrt{\frac{\sigma}{6\pi}}$$

Polynom 3. Grades

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

x soll nicht bestimmt werden, lediglich a, b, c, d

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$(1) f(0) = 0 \quad \text{also } d = 0$$

$$(2) f(2) = 1 \quad \text{also } 8a + 4b + 2c = 1$$

$$(3) f'(2) = -\frac{3}{2} \quad \text{also } 12a + 4b + 2c = -\frac{3}{2} \quad | \cdot (-2) \quad -I$$

$$(4) f''(2) = 0 \quad \text{also } 12a + 2b = 0$$

$$\begin{array}{rcl} -16a - 4b & = & 4 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = -3 \\ c = \frac{9}{2} \end{array}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$$

Blatt II

Berechnung der Obersumme

$$\sigma_n = \frac{b}{n} \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \left(2\frac{b}{n}\right)^2 + \dots + \frac{b}{n} \left(n\frac{b}{n}\right)^2$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$u_n < F < \sigma_n$$

Untersumme < Fläche < Obersumme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{b^3}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$$

an Stelle $\sum_{k=1}^n x^2 dx = \frac{b^3}{3}$

Schreibt man

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

Def 7.1.1. Eine Menge $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$
 reelle Zahlen mit der Eigenschaft
 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
 heißt eine Zerlegung z des
 Intervalls $[a, b]$;

$$\Delta(z) := \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) \text{ heißt}$$

Feinheit von z

Def 7.1.2 Es sei f auf $[a, b]$ definiert
 und beschränkt, z sei eine
 Zerlegung von $[a, b]$ und

$$m_i := \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

$$M_i := \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

($i = 1, \dots, n$)

Dann heißt

$$U(z) := \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$$

Untersumme
 die z zugeordnete

$$O(z) := \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

Obersumme

Bem.: $m_i \leq M_i \Rightarrow U(z) \leq O(z)$

Def 7.1.3 Eine Funktion f heißt auf einem Intervall $[a, b]$ genau dann integrierbar (im Riemannschen Sinn)

wenn $\lim_{\Delta(z) \rightarrow 0} U(z)$ und $\lim_{\Delta(z) \rightarrow 0} O(z)$

existiert und gleich sind,

Der gem. Grenzwert heißt das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ und wird mit dem Symbol

$\int_a^b f(x) dx$ bezeichnet

$f(x)$ heißt Integrand, a untere Grenze, b heißt obere Grenze, x heißt Integrationsvariable

Bem.: 1.

Integrationsvariable ist eine gebundene Variable

7. ist $f(x) \geq 0$ dann kann $f(x)$ als Fläche definiert werden.

Nur wenn der Graph in rechter oberer Teil liegt kann Integral bzgl. angewandt werden

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (0,1)$$

$$\bigwedge_z \begin{cases} \sigma(z) = 1 \\ u(z) = 0 \end{cases}$$

Es gibt keinen gemeinsamen Grenzwert

Technik des Integrierens

Satz 7.1.4: Ist f über $[a,b]$ und $[b,c]$ integrierbar ($a < b < c$), so auch über $[a,c]$ und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Blatt 3

Def 7.1.5 $\int_a^a f(x) dx = 0$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Satz 7.1.6 $\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] dx :$

$$= c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

Satz 7.1.7 : Ist f mit $f \geq 0$ über $[a, b]$ integrierbar, so gilt: $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Beweis 1 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Satz 7.1.8 Sind f_1 und f_2 mit $f_1 \leq f_2$ über $[a, b]$ integrierbar, so gilt:

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$$

Bew $0 \leq f_2 - f_1$ integrierbar $\xRightarrow[7.1.6]{7.1.7} \int (f_2 - f_1) \geq 0$

↓
OPERATIONSSCHR. W. FÜR
FIX

$$\stackrel{7.1.6}{\Rightarrow} \int f_2 \geq \int f_1$$

Satz 7.19: Ist f über $[a, b]$ int'bar,
so auch $|f|$, und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Satz 7.1.10 Ist f auf einem Intervall
 $[a, b]$ monoton, so ist f
über $[a, b]$ int'bar

Satz 7.1.11 Ist f stetig auf $[a, b]$, so ist
 f über $[a, b]$ int'bar

Def 7.1.12 Eine Funktion f heißt
auf $[a, b]$ stückweise
stetig, wenn $[a, b] \subseteq D(f)$
und f auf $[a, b]$ mit Ausnahme
endlich vieler Sprungstellen
stetig ist.

Satz 7.1.13 Ist f auf $[a, b]$ stückweise
stetig, so ist f über $[a, b]$
int'bar