

①

24.01.01  
24. Vorlesung

## Bestimmte Integral

Stetige u. stückweise stetige Funktionen können integriert werden (stückweise stetige Funktionen haben Lücken)

(Reimannsche Integral nicht in der Klausur)

## 7.2. das unbestimmte Integral

$$\int_a^z f(x) dx$$

$z$  ist konstant, kann aber auch einen anderen Wert annehmen  
Funktion  
Das Integral ist von  $z$  abhängig

● Satz 7.2.1. Das Integral ist eine <sup>stetige</sup> Funktion der oberen (unteren) Grenze

Satz 7.2.2 Es sei  $f$  auf  $[a, b]$  stetig und

$$F(z) = \int_a^z f(x) dx$$

Dann ist  $F$  auf  $[a, b]$  diff'bar und es gilt  
 $F'(z) = f(z) \quad z \in [a, b]$

Die Differenziation ist die Umkehrung der Integration

Eine Funktion  $F$  heißt genau dann Stammfunktion (zu) einer Funktion  $f$  auf einem Intervall wenn gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Die große  $F(x)$  abgeleitet ergibt klein  $f(x)$

Bem: 1.  $F(x) = \int f(x) dx$

Man nennt groß  $F$  ein unbestimmtes Integral von klein  $f$

(rechts von Gleichheitszeichen darf kein Wert eingesetzt werden (nur  $F(z) = \int f(x) dx$

2. Jede stetige Funktion (nach 2.2.) besitzt eine Stammfunktion. Und das Auffinden der Stammfunktion nennt man unbestimmt integrieren.

- bestimmtes integrieren  $\rightarrow$  Zahlenwert
- unbestimmtes integrieren  $\rightarrow$  auffinden einer Funktion

ist  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$ , so ist auch  $F + c$  mit  $c \in \mathbb{R}$  eine Stammfunktion zu  $f$ .

(Es gibt also mehrere Funktionen zu einer Funktion



Bew:  $(F(x) + c)' = F'(x) + 0 \stackrel{n.v.}{=} f(x)$

- Bem:
- Eine Stammfunktion bzw. ein unbest. Integral ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.
  - Jede einzelne Stammfunktion kann als Repräsentant der Menge aller Stammfunktionen aufgefasst werden.

$$\int f(x) dx = \{ F \mid F'(x) = f(x) \}$$

BSP  $\int x^2 dx$  (gesucht ist ein unbestimmtes Integral von  $x^2$ )

müsste  $\frac{x^3}{3}$  sein

$\frac{x^3}{3} + c$  (Menge aller Stammfunktionen)

$$\int x^2 dx = \frac{x^3 + 1}{3} + c$$

also  $\Rightarrow \frac{x^3}{3} + c = \frac{x^3 + 1}{3} + c$   
 $0 = \frac{1}{3}$

die beiden Integrationskonstanten sind nicht gleich, sie müssen unterschieden werden  
 $C_1 \neq C_2$

$$(C_1 = \frac{1}{3} + C_2) ?$$

Satz 7.2.5: Sind  $F_1$  und  $F_2$  Stammfunktionen zu  $f$ , so gibt es eine Zahl  $c \in \mathbb{R}$  so dass gilt

$$F_2 = F_1 + c$$

Bew.  $G := F_2 - F_1 \Rightarrow G' = F_2' - F_1' \stackrel{n.v.}{=} 0$

$$G' = f - f = 0$$

$$\stackrel{G.S.4}{\Rightarrow} G = \overset{\text{Konstante}}{c} \Rightarrow F_2 = F_1 + c$$

Satz 7.2.6 Hauptsatz der Diff'zial und Integralrechnung

Ist  $f$  auf  $J = [a, b]$  stetig und  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$ , so gilt für alle  $c, d \in \text{Intervall}$

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$



②

Bew.:

$$\int_a^z f(x) dx = F(z) + k$$

$$\int_c^d f(x) dx \stackrel{(*)}{=} \int_a^d f(x) dx - \int_a^c f(x) dx$$

$$= F(d) + k - F(c) - k = F(d) - F(c)$$

Bem.: ~~g~~ abkürzende Schreibweise

$$1. \quad F(b) - F(a) =: F(x) \Big|_a^b$$

2. Bedeutung der HS liegt in der Tatsache dass die her. best. Int. mit Hilfe der Stammfunktionen gelingt.

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^b = \frac{b^3}{3}$$

## 7.3 Integrationsmethoden

Von der Diff. eq. lässt jede Funktion in geschlossener Form vor (z.B.  $f(x) = \sin x^2 + \ln x$ ) erkannt werden eine Funktion in geschl. Form vor bei Ableitungen

bei der Integrallog. ist dies nicht so

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

zu dieser Funktion kann keine elementare Funktion finden (keine mit geschl. Form)

$$\checkmark e^{-x^2}, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

### Grundintegrale

$$7.3.1 \quad \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1)$$

$$7.3.2 \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\text{Bew: } x > 0 : \ln|x| = \ln x \Rightarrow \frac{d \ln|x|}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$x < 0 : \ln|x| = \ln(-x) \rightarrow \frac{d \ln|x|}{dx} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

$$7.3.3. \quad \int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + c \quad \checkmark$$

$$7.3.4 \quad \int \sin x dx = -\cos x + c \quad \checkmark$$

$$7.3.5 \quad \int \cos x dx = \sin x + c \quad \checkmark$$

$$7.3.6 \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c \quad \checkmark$$

$$7.3.7 \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c \quad \checkmark$$



$$7.3.8 \int e^x dx = e^x + c \checkmark$$

$$7.3.9 \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \checkmark$$

$$7.3.10 \int \frac{1}{1+x^2} dx \quad \boxed{\text{Arcus}} \tan x + c$$

$$7.3.11 \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\bullet 7.3.12 \int f(x) f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x) + c$$

Integraltafeln  
Taschenrechner B...

### Satz 7.3.13 Linearität des Integrierens

Sind  $f_1$  und  $f_2$  stetig auf  $J$  so gilt:

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) dx = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx$$

Bew: linke Seite:

$$\left[ \int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) dx \right]' = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

rechte Seite

$$\begin{aligned} & \left[ c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx \right]' = \left[ c_1 \int f_1(x) dx \right]' \\ & + \left[ c_2 \int f_2(x) dx \right]' = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \end{aligned}$$

## Satz 7.3.14 (partielle Integration)

Sind  $u$  und  $v$  stetig diff'bar auf  $J$ , so gilt

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx.$$

Bew.:  $\{u(x) v(x)\}' = u'(x) v(x) + v'(x) \cdot u(x)$

Durch Integral

$$\int u(x) v'(x) dx = \int u'(x) v(x) dx + \int u(x) v'(x) dx$$

BSP.: 1.  $\int x \cos x dx$   $u(x) = x$   $v'(x) = \cos x$   
 $u'(x) = 1$   $v(x) = \sin x$

$$= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

Zur Probe nach der Produktregel ableiten  $\nearrow$

2:  $\int \sin^2 x dx$

$$u = \sin x \quad v' = \sin x$$

$$u' = \cos x \quad v = -\cos x$$

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx$$

$$2 \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x$$



③

$$3. I_n = \int (\ln x)^n dx \quad (n \in \mathbb{N}) \quad u = (\ln x)^n \quad v' = 1$$

$$u' = n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \quad v = x$$

$$u' = \frac{n}{x} (\ln x)^{n-1}$$

$$= x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx \quad (\text{Rekursionsformel})$$

$$I_1 = x \ln x - x$$

für  $n=1$  haben wir  
verschiedenes  
Integral

$$\int_1^{e^2} \ln x dx = \left. x \ln x - x \right|_1^{e^2}$$

$$= e^2 \ln e^2 - e^2 + 1$$

$$= 2e^2 - e^2 + 1$$

$$= e^2 + 1$$