

①

26.01.01
25. Vorlesung

Integral

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = 0$$

Partielle Integration als Umkehrung der Produktregel

- Substitutionsregel "analog" zur Kettenregel
Satz 7.3.5 Substitutionsregel: Ist φ diff'bar auf einem Intervall I_1 , das durch f auf einem Intervall I_2 abgebildet wird. Und ist f stetig auf I_2 , so gilt:

$$\int f(x) \, dx \Big|_{x=\varphi(u)} = \int f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \, du$$

Bew: $\left(\int f(x) \, dx \Big|_{x=\varphi(u)} \right)' = f(x) \Big|_{x=\varphi(u)} \varphi'(u) = f(\varphi(u)) \varphi'(u)$

$$\left(\int f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \, du \right)' = f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$$

BSP.: 1. $\int \sin^3 u \cdot \cos u \, du$ — $\varphi(u) = \sin u$
 $\varphi'(u) = \cos u$
 $\int x^3 \, dx \Big|_{x=\sin u} = \frac{x^4}{4} = \frac{\sin^4 u}{4}$

f umkehrbare Funktion

$$\int f(x) dx = \int f(f(u)) y'(u) du \quad | \quad u = f^{-1}(x)$$

2. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; setze $u = 1-x^2$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -u^{\frac{1}{2}}$$

(u durch $1-x^2$ ersetzen)

$$= -\sqrt{1-x^2}$$

u und x darf nicht
im gleichen Integral
sein
 $du = -2x dx$

- Multiplikative
Konstanten können
vor das Integral
gezogen werden

3. $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx \stackrel{u=e^x}{=} \int \frac{u-1}{u+1} \cdot \frac{1}{u} du =$

$$\frac{du}{dx} = e^x = u$$

Partial-
bruch-
zerlegung
(Böhm)

$$= \left[\frac{2}{u+1} - \frac{1}{u} \right] du$$

$$= 2 \ln(u+1) - \ln u = 2 \ln(e^x + 1) - x$$

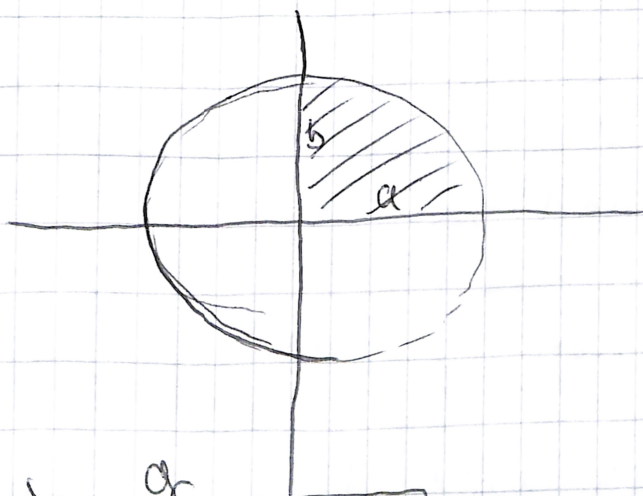
$$4. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{3}{4}} + 1$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

Man kann
die Integrations-
grenzen auch
transformieren

$$1 - \frac{1}{2} = -\sqrt{u} \Big|_1^{\frac{3}{4}}$$

5. Fläche einer Ellipse



2 Halbachsen (a, b)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

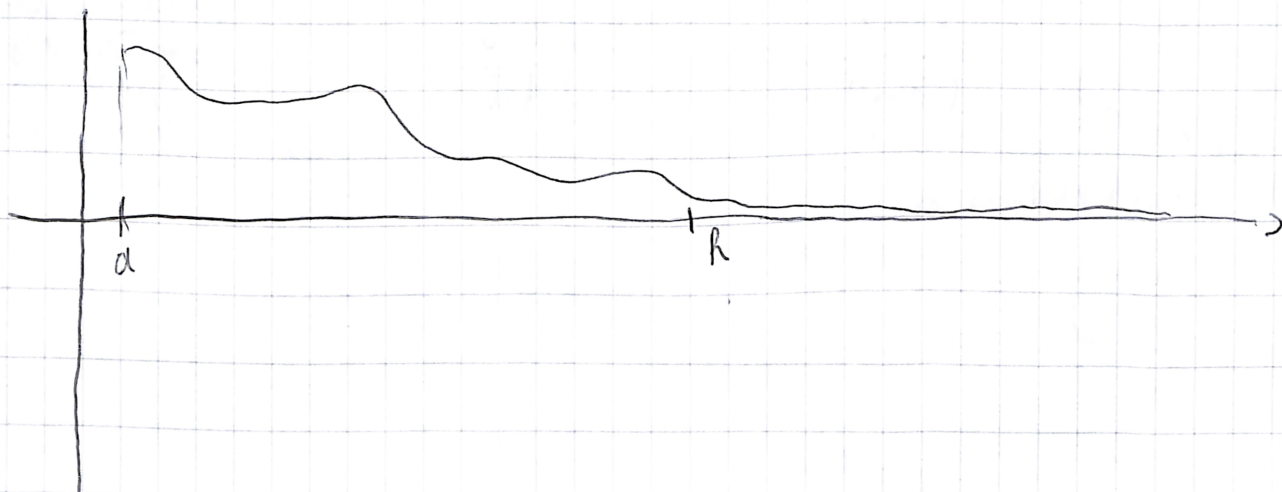
$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$F_E = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \dots a \cdot b \cdot \pi$$

$x = a \sin t$
dx durch dt
ersetzen

7.4 Uneigentliche Integrale

nichtbeschränkte Intervalle



Def 7.4.1: Es sei f auf $[a, \infty[$ definiert und über Teilbereich $[a, R]$ int'bar. Falls

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx =: \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ existiert,}$$

so heißt f über $[a, \infty[$ int'bar

und das uneigentliche Integral

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ konvergent. Falls}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx \text{ nicht im eigentl. Sinn}$$

existiert, heißt $\int_a^{\infty} f(x) dx$ divergent (nicht existent)

BSP 1

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x} dx$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-e^{-x} \Big|_0^R \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{-R})$$

$$= 1$$

BSP 2

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R = \infty$$

BSP 3

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^d} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^d} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^{1-d} - 1}{1-d}$$

Vorzeichen
des Exponenten = $\begin{cases} \infty & d < 1 \\ \frac{1}{d-1} & d > 1 \end{cases}$
beachten

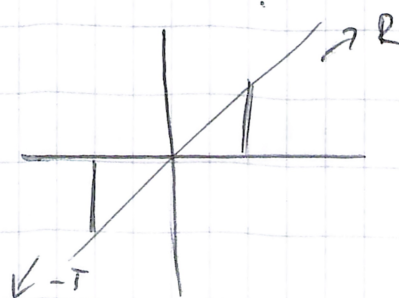
Satz 7.4.2 Das uneigentliche Integral

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^d}$ konvergiert genau dann

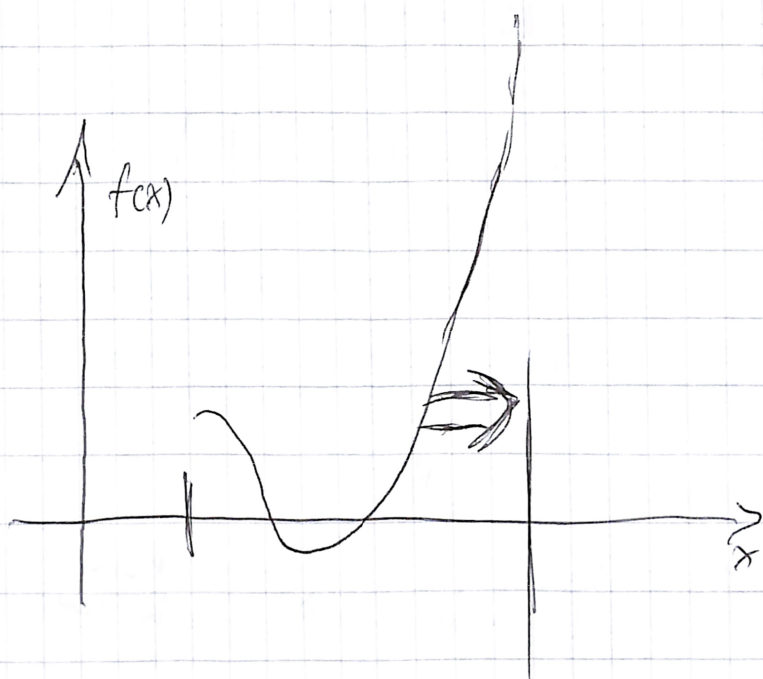
wenn gilt: $d > 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ T \rightarrow -\infty}} \int_T^R x dx$$

$$= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ T \rightarrow -\infty}} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{T^2}{2} \right) \text{ existiert nicht}$$



nicht beschränkte Funktionen



Def 7.4.3: Eine Funktion f sei auf einem beschränkten Intervall ~~Wahr~~ $[a, b[$ definiert, in Umgebung linksseitig von b $U^{(L)}(b)$ nicht beschränkt über jedem Intervall $[a, R]$ $a < R < b$ integrierbar

Falls $\lim_{R \rightarrow b-0} \int_a^R f(x) dx =:$
 $\int_a^b f(x) dx$ existiert.

Das heißt f über $[a, b]$ integrierbar, und das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) dx$ konvergent

Falls $\lim_{R \rightarrow b-0} \int_a^R f(x) dx$ nicht in eigentl. Sinn existiert, so heißt $\int_a^b f(x) dx$ divergent

BSP 1

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{R \rightarrow 1-0} \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{R \rightarrow 1-0} \left[-2\sqrt{1-x} \right]_0^R = \lim_{R \rightarrow 1-0} (-2\sqrt{1-R} + 2) = 2$$

BSP 2

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{R \rightarrow 0+0} \int_R^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{R \rightarrow 0+0} \left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] \quad \alpha \neq 1$$

x^α integrierbar

$$\lim_{R \rightarrow 0+0} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ -\ln R & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ \infty & \alpha = 1 \\ \infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

Satz 7.4.4 : Das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

Konvergiert genau

dann wenn gilt: $\alpha < 1$.

Def 7.4.5 Es sei f in $U(c)$ ($a < c < b$) nicht beschränkt. Das uneigentliche Integral

$\int_a^b f(x) dx$ heißt genau dann konvergent

wenn

$\int_a^c f(x) dx$ und $\int_c^b f(x) dx$ konvergent sind,

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

BSP: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{-1}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{-x}} + \lim_{\beta \rightarrow 0+0} \int_{\beta}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} -0$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow 0+0} (-2\sqrt{-2} + 2\sqrt{\beta}) = \lim_{\beta \rightarrow 0+0} (2\sqrt{\beta} - 2\sqrt{2})$$

BSP2 $\int_{-2}^3 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-2}^3 = \ln 3 - \ln 2 = \ln 1,5$

dieses Integral existiert nicht $\Rightarrow$ Falsch

8 Funktionen mehrerer Variablen

8.1. Der Raum $\mathbb{R}^n$

Def 8.1.1: $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$

$x := (x_1, \dots, x_n)$ heißt Punkt des $\mathbb{R}^n$; x_i ist die i -te Koordinate von x . $0 := (0, \dots, 0)$ heißt Ursprung (Nullpunkt) des $\mathbb{R}^n$.

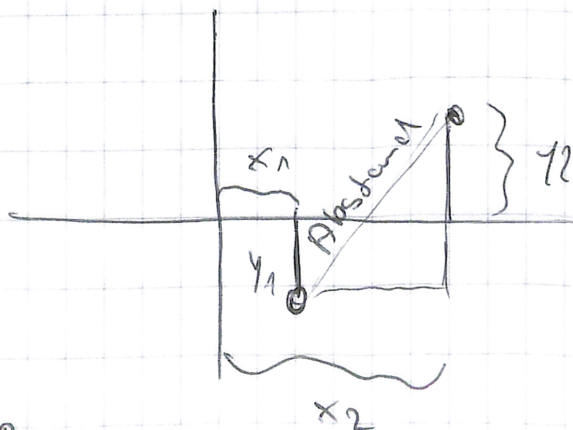
Bem!

* $\vec{x}$ (alt. Schreibweise)

Def 8.1.2: Es sei $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ Punkte des $\mathbb{R}^n$. $d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

heißt Abstand der Punkte x und y .

$$\begin{matrix} y_2 - x_2 \\ y_1 - x_1 \end{matrix}$$



Das kann man
Punkte im
 n -dimensionalen Raum.