

①

Operationen Vereinigung & Durchschnitt

3. Vorlesung

Def 1.3.9: Zwei Mengen A und B heißen genau dann disjunkt oder fremd, wenn gilt:
~~dann~~ $A \cap B = \emptyset$

Der Durchschnitt v. A u. B bildet eine neue Menge

Bemerkung: Bei drei Mengen benutzt man den Ausdruck "paarweise disjunkt"

$$A \cap B ; B \cap C ; A \cap C$$

Satz 1.3.10: Für alle Mengen A, B, C gilt:

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A \cup B \\ A \cap B \end{aligned}} \right\} \text{Kommutativ-Gesetze der Mengenlehre}$$

$$A \cup B \cup C \rightarrow \text{falsch}$$

man kann keine drei Mengen verknüpfen
 da aus zwei vereinigten Mengen eine neue Menge entsteht

deshalb:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A \cup (B \cup C) \\ A \cap (B \cap C) \end{aligned}} \right\} \text{Assoziativ-Gesetze}$$

→ wie: Punktrechnung
 Verknüpfung.
 U wie * D wie +

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A \cup (B \cap C) \\ A \cap (B \cup C) \end{aligned}} \right\} \text{Distributiv-Gesetze der Mengenlehre}$$

Zwei Mögl. das Gesetz zu beweisen:

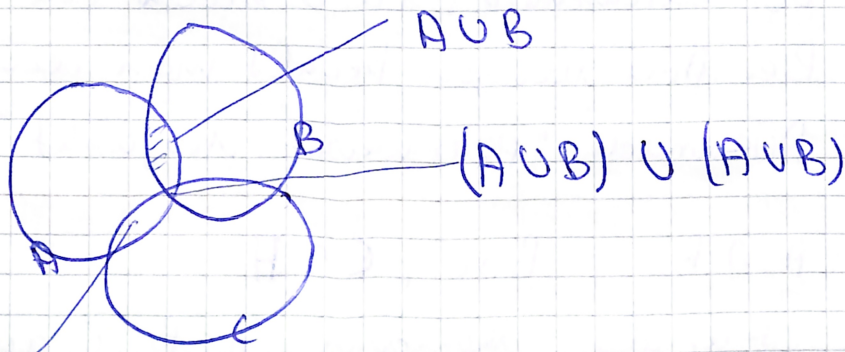
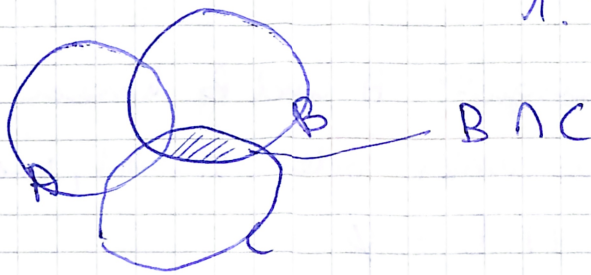
Wahrheitstafel

2 B:

x liegt in der Menge oder nicht
 x enthält od enthält nicht!

Venn - Diagramm

1. Distributiv-Gesetz



$A \cup B$

Def 1.3.11: Gibt es in der Mengenlehre ein $+$ } nein

Vereinigung

wie $+$ ist Vereinigung

$A \setminus B \rightarrow$ „Differenzmenge von $A \cup B$ “
„A ohne B“

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

$$\text{BSP: } \{1, 7, 12\} \setminus \{1, 8, 10\} = \{7, 12\}$$

1 gehört zu A und zu B $\rightarrow$ gehört desh. nicht zu Differenzmenge

$A \setminus B$

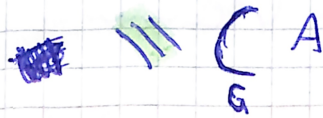
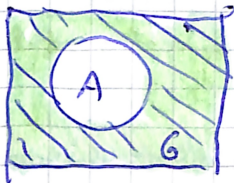


Def 1.3.12: Komplement

Es sei $A \subseteq G$, $\complement A := \{x \mid x \in G \wedge x \notin A\}$

$\complement A$ ← Komplement
 G ← Grundmenge

Komplementärmenge von A bez. G



Satz 1.3.13 Regeln der Mengen algebra

Es sei dann

$$A \cup B \subseteq G; \quad \complement_G(\complement_G A) = A$$

$$A \cap B = A \cap B \subseteq B, \quad \complement_G(A \cup B) = \complement_G A \cap \complement_G B$$

$$\complement_G(A \cap B) = \complement_G A \cup \complement_G B$$

Über Beide Seiten ein wenn-Diagramm

Produktmenge

für Multiplikation

Def: 1.3.14:

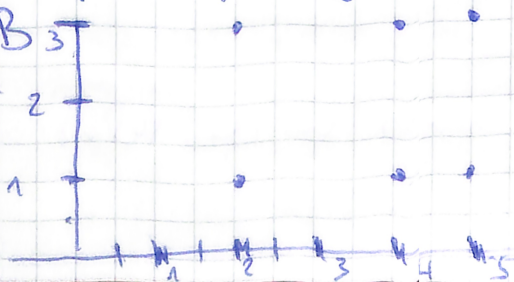
$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

"Cartesische Produkt von A u B" od. Produktmenge

! Mengenelemente kann man nicht multiplizieren !

Bsp: $A = \{4, 2, 5\}$ $B = \{1, 3\}$

Ordinate
Hochachse



Paare = Punkte

Rechachse
Abszisse

Die sechs Punkte stellen das Kartesische Produkt von A u B dar

→ bei ~~drei~~ Punkten kann man in die Dreiecke einzeichnen

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n := \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in M_i; i = 1, \dots, n \right\}$$

n -Tupel

in runden Klammern darf man nichts vertauschen
in geschweiften Klammern darf man vertauschen

→ wichtig für 1. und 2. Koordinaten müssen auseinandergehalten werden

$$x, y \neq y, x \quad \text{z.B.}$$

Def 1.3.15 Jede Teilmenge R des kartesischen Produkts $A \times B$ heißt Relation zwischen A und B

Die Menge der Punkte (a, b) mit $(a, b) \in R$ heißt Graph der Relation

Bemerkung: Manchmal findet man die Relation (1) reflexiv

$$a R b, a \sim b$$

a steht in Relation zu b

Def 1.3.16: Eine Relation $R \subseteq A \times A$

heißt genau dann reflexiv, wenn

$$\forall a \in A (a, a) \in R$$

für alle a (a aus A) muss in der Relation

② (2) Symmetrisch : $\bigwedge_{a,b \in A} [(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R]$

(3) transitiv : $\bigwedge_{a,b,c \in A} [(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R]$

(4) identitiv ^{wenn gilt} : $\bigwedge_{a \in A} [(a,a) \in R]$

identitiv einer Relation wenn $ab = ba$ dann muss $a = b$ sein

Def 1.3.17 : Eine Relation $R \subseteq A \times A$

heißt genau dann Äquivalenzrelation auf A , wenn (1), (2), (3) gilt. (wenn sie sym, transitiv, ~~reflexiv~~ oder reflexiv ist)

Ordnungsrelation " , (1), (3), (4) gilt.

Bsp 1.: "kleiner" auf $\mathbb{N}$

Relation über 2 Elemente

7 u. 3 $\rightarrow$ stehen in der Relation

7 u. 3 : (7 kleiner 3) $\rightarrow$ nein

3 u. 7 : (3 kleiner 7) $\rightarrow$ ja

$$R_{<} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge \bigvee_{n \in \mathbb{N}} x+n=y\}$$

Begriff Reflexiv : wenn muss sein AID muss sein

Bsp: Paar 7,7 ist 7 kleiner 7 $\rightarrow$ nein

$7 + \mathbb{N} = 7 \rightarrow$ keine Lösung

Paar 7+7 geh. nicht zur Relation

Sind beide Paare gleich gibt es keine Relation

Sym a kleiner $b \Rightarrow b$ kleiner a
Relation nicht sym

transitiv $a < b$ $b < c$ dann $a < c$
Relation ist transitiv

identitiv $A < B$ und $B < A$
dann $A = B$ nicht erfüllbar
 $\hookrightarrow$ implikation umkehrung
also ist die Relation identitiv

2 „kleiner gleich“ auf $\mathbb{N}$

$$R_{\leq} = \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge \forall m \in \mathbb{N}_0 \exists n \in \mathbb{N}_0 x + m = y + n \}$$

$$(7, 7) \rightarrow 7 + 0 = 7 \text{ kleiner gleich Relation}$$

wenn $A \leq A$ Richtig

wenn $A \leq B \Rightarrow$

X kleiner gleich ist eine Ordnungsrelation X

Bsp 3 "Teilmenge" auf $\mathcal{P}M$
 Potenzmenge

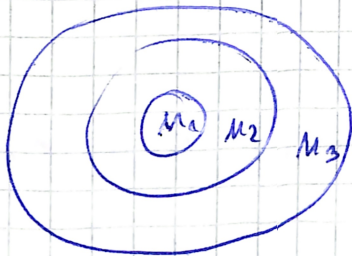
Teilengenrelation

$$R \subseteq \{(M_1, M_2) \mid M_1 \subseteq PM \wedge M_2 \subseteq PM \wedge M_1 \subseteq M_2\}$$

Reflexivität $\rightarrow$ ist jede Menge Teilmenge von sich selbst

M_1 Teilmenge v. M_2

M_2 - " - v. M_3



identisch

M_1 Teilmenge M_2

M_2 - " - M_2

jede Menge ist Teilmenge von der anderen

bei Bsp 3 liegt eine Ordnungsrelation vor

Bsp 4 "parallel"

Relation eine Gerade ist parallel zu einer

Reflexivität = jede Gerade ist parallel zu ~~den~~ sich selbst $\rightarrow$ ja

transitiv

Zwei ~~parallel~~ Geraden sind parallel

sym

wenn A B parallel zu B A

denn B A - " - A B

identisch / G_1 parallel zu G_2
dann muss G_2 parallel zu G_1

→ Implikation falsch
nicht identisch

Die Parallelität zu Geraden ist
eine Äquivalenzrelation

Relationen

Def 1.3.18: Eine Relation $R \subseteq M \times N$ ^{Teilmenge}
heißt genau dann rechts-eindeutig wenn

$$\bigwedge_{x \in M} \bigwedge_{y_1, y_2 \in N} \left[(x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R \Rightarrow y_1 = y_2 \right]$$

Jede rechts-eindeutige Relation $f \subseteq M \times N$ heißt
Funktion:

f heißt Abbildung aus M in N . gilt $(x, y) \in f$

(→ Funktion → ein Wert muss zugeordnet sein)
→ ~~also~~ So heißt y Bild von x ~~x Urbild von y~~
~~x geht über in f von x~~

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow y = f(x); \quad x \mapsto f(x), \quad x \mapsto y$$

Def 1.3.19: Ist f eine Abbildung aus M in
 N so heißt

$$D(f) := \left\{ x \mid x \in M \wedge \bigvee_{y \in N} (x, y) \in f \right\}$$

Definitionsbereich von
 f

3

$$B(f) := \{ y \mid y \in N \wedge \bigvee_{x \in M} (x, y) \in f \}$$

Bildbereich von f

(Wertebereich od.
Wertmenge, Bild-
bereich, Bildmenge)

was ist eine Funktion 3 Teile $\rightarrow$ Tripel

1. Menge M aus der eine andere Menge N abgeleitet wird und $f(x)$

spezielle Funktion

eine Funktion $f \subseteq D(f) \times N$ heißt

Abbildung von $D(f)$ in N

Abbildung von $D(f)$ auf N falls

$$N = B(f) \quad (\text{surjektiv})$$

injektive Abbildung:

von $D(f)$ in N in (injektiv) falls

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in D(f)} \bigwedge_{y \in N} \left[(x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f \Rightarrow x_1 = x_2 \right]$$

2wei ~~verschieden~~ Urbildergleich $\rightarrow$ Funktionswert gleich
2wei verschiedene Urbilder $\rightarrow$ Funktionswerte verschieden

Umkehrabb. Abb (von $D(f)$ auf N) falls
surjektiv und injektiv ist

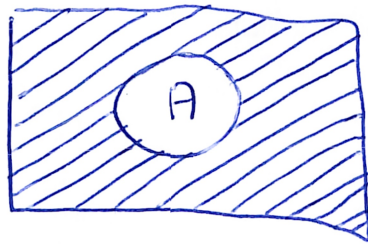
Bsp .

Komplement

Falls A Teilmenge von B ist : $A \subseteq B$

- Das Komplement oder die Komplementärmenge der Menge A bezüglich der Universalmenge Ω enthält alle Elemente der Menge Ω die nicht in der Menge A enthalten sind.

Man schreibt: $\neg A = \{x \mid x \in \Omega \wedge x \notin A\}$



Es sei $A \subseteq G$

$$\underset{G}{C} A := \{x \mid x \in G \wedge x \notin A\}$$

Kommutativgesetze der Mengenlehre:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Assoziativgesetze der Mengenlehre:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributivgesetze der Mengenlehre:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Mengenalgebra

$$\text{Es sei: } A \cup B \subseteq G; \bigcap_{G} \bigcap_{G} A = A$$

$$A \setminus B = A \cap B \bigcap_{G} B$$

$$= \bigcap_{G} (A \cup B)$$

$$= \bigcap_{G} A \cap \bigcap_{G} B$$

Produktmenge / Kartesisches Produkt

Das Produkt oder die Produktmenge zweier Mengen A und B besteht aus allen Paaren je eines Elements aus der Menge A und aus der Menge B .

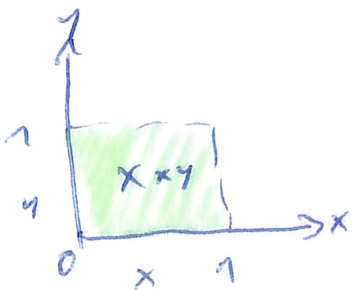
$$\text{Man schreibt: } A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}$$

Beispiel: Es seien $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

die Einheitsintervalle der Kartesischen Zahlenebene.

Dann stellt die Produktmenge $X \times Y$ offensichtlich das Einheitsquadrat dar.

$$X \times Y = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}$$



Es sei: $A = \{ a_i \mid i\text{-ter Auftrag des Monats} \}$
 $M = \{ m_j \mid j\text{-te Maschine} \}$

Die Produktmenge -

$$A \times M = \{ (a_i, m_j) \mid a_i \in A, m_j \in M \}$$

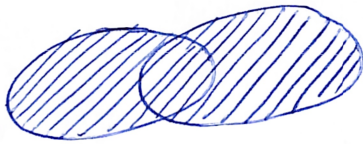
enthält alle denkbaren Zuordnungen der
Aufträge zu den Maschinen

- Es können die Produkte von mehr als zwei Mengen gebildet werden
- Sind $A_1, A_2, \dots, A_k$ Mengen, dann enthält ihre Produktmenge alle k -Tupel von Elementen der Mengen $A_i (i = 1, 2, \dots, k)$

Vereinigung

Die Vereinigung oder die Vereinigungsmenge zweier Mengen A u. B enthält alle Elemente, die entweder in A oder in B oder in beiden Mengen enthalten sind.

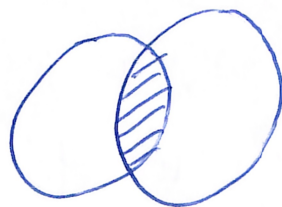
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$



Durchschnitt

Der Durchschnitt oder die Durchschnittsmenge zweier Mengen A und B enthält alle Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.

Man schreibt: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



Differenz

Die Differenz oder die Differenzmenge zweier Mengen A und B enthält alle Elemente von A die nicht in B enthalten sind.

Man schreibt: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$



$$\{1, 7, 12\} \setminus \{1, 8, 10\} = \{7, 12\}$$

Relationseigenschaften

Symmetrisch $x R y \rightarrow y R x$

$$\bigwedge_{a,b \in A} [(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R]$$

transitiv

$$x R y \wedge y R z \rightarrow x R z$$

$$\bigwedge_{a,b,c \in A} [(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R]$$

identitativ

$$x R y \wedge y R x \rightarrow x = y$$

$$\bigwedge_{a,b \in A} [(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b]$$

wenn $ba = ab$ dann muss $a = b$ sein

reflexiv

$$x R x, a R b, a \sim b$$

Falls zwischen den Elementen zweier Mengen X und Y bestimmte Beziehungen bestehen, dann bezeichnet man diese ^{als} Relationen oder auch als Abbildungen. Dabei wird häufig eine Betrachtungsrichtung derart festgelegt, dass man von Elementen einer Menge ($x \in X$) ausgeht und ihre Beziehung zu den anderen Elementen der anderen Menge ($y \in Y$) untersucht.

- Es seien X und Y Mengen. Eine ~~Abbildung~~ Relation f zwischen X und Y ordnet Elementen $x \in X$ Elemente $y \in Y$ zu.

Man schreibt $f: X \rightarrow Y$

- Die Zuordnung kann man sich in Form geordneter Paare vorstellen, derart, dass jeweils das Element der einen Menge (X) immer an erster Stelle genannt wird.

BSP: $X = \{ x \mid x \text{ ist ein Haus in } \dots \}$

$$Y = \{ y \mid y \in \mathbb{N} \}$$

Das Hausnummernsystem stellt eine Relation dar

$$f: X \rightarrow \mathbb{N} \quad (\{ \text{Häuser} \} \rightarrow \{ \text{Nummern} \})$$

2. Die Bücher unserer Bibliothek sind nach folgendem System signiert:

M = Sachgebiet

2 = Unterteilung des Sachgebietes

024 = fortlaufende Nummer des Sachgebietes
M2

Es seien: $S = \{B, E, L, M, O, X\}$ Sachgebietsbezeichnungen

$Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Unterteilungen

$\mathbb{N} = \{ \}$ die Menge der natürlichen Zahlen

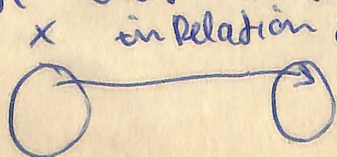
$B = \{x \mid x \text{ ist ein Buch in der Bibliothek}\}$

Jede Signatur eines Buches ist Element der Produktmenge $S \times Z \times \mathbb{N}$

Das Signiersystem stellt eine Relation dar:

$$f: B \rightarrow S \times Z \times \mathbb{N}$$

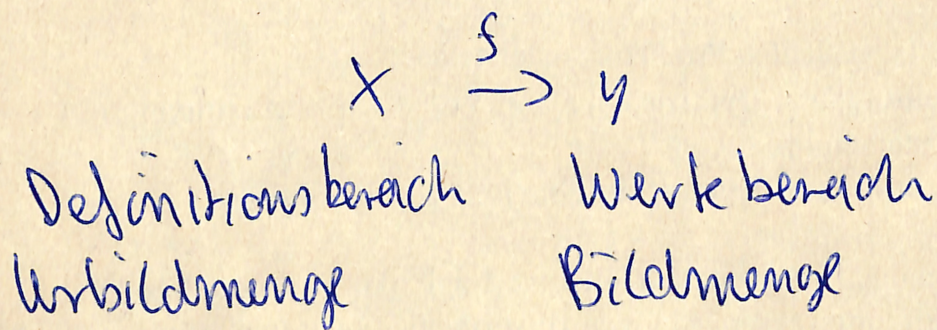
$\Rightarrow$ Entsprechend unserem Verständnis von Mengen kann man eine Abbildung / Relation auch dadurch beschreiben, dass man zugeordnete Elemente der Mengen verbindet.



Die Richtung der Pfeile ist in dieser Art der Abbildung eindeutig, da es sich ja um eine geordnete Paarbildung handelt.

Die Menge X wird als Definitionsbereich $D(f)$ der Relation f bezeichnet, während die Menge Y Wertebereich $W(f)$ genannt wird.

- Alternative Bezeichnungen sind:

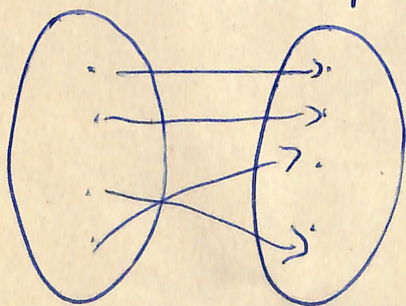


- ⇒ Eine Relation MUSS nicht alle Elemente des Definitionsbereiches berücksichtigen. Ebenso wenig brauchen alle Elemente des Wertebereiches erfasst zu werden.

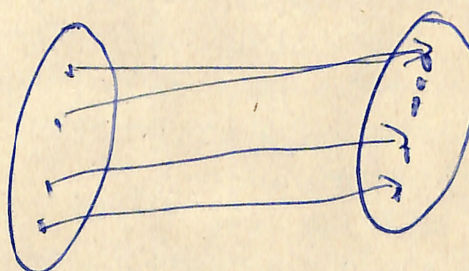
Je nachdem wie viele Elemente der beiden Mengen von der Abb. einbezogen werden, unterscheidet man Abb. wie folgt:

- Ist allen Elementen der Urbildmenge X mindestens ein Element der Bildmenge zugeordnet, so liegt eine **Abbildung von X vor**.
- Gilt die Beziehung nur für eine Teilmenge von X (d.h. gehen nicht von allen Elementen $x \in X$ Pfeile aus), dann heißt die **Abbildung aus X** .
- Entspricht jedem Bild $y \in Y$ mindestens ein Urbild, so wird die **Abbildung auf Y** bezeichnet.
- **Abbildung in Y** wenn nicht alle $y \in Y$ ein Urbild $x \in X$ besitzen

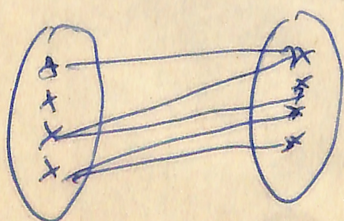
von X auf Y



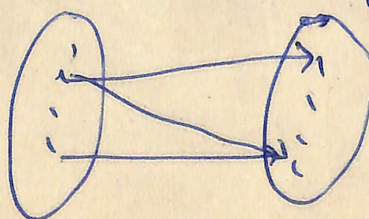
Von X in Y



aus X auf Y



aus X in Y



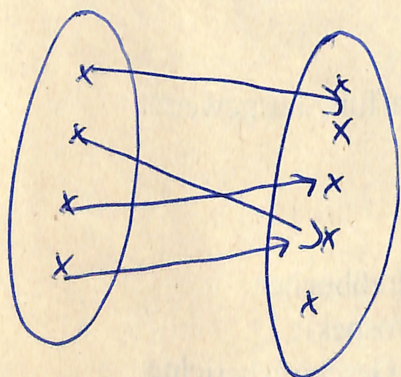
Neben der Klassifizierung im Hinblick auf die beteiligten Teilmengen unterscheidet man Abbildungen im Hinblick auf ihre Eindeutigkeit.

- Eine Abbildung ist eindeutig wenn einem Element $x \in X$ der Urbildmenge höchstens ein Element $y \in Y$ der Bildmenge zugeordnet ist.
- Eine Abbildung ist eineindeutig wenn Sie eindeutig ist und verschiedenen Elementen $x \in X$ unterschiedliche Elemente $y \in Y$ zugeordnet sind, d.h. jedem Bild genau ein Urbild entspricht und umgekehrt.
- Eine Abbildung ist Mehrdeutig wenn einem Urbild $x \in X$ mehrere Bilder $y \in Y$ entsprechen.

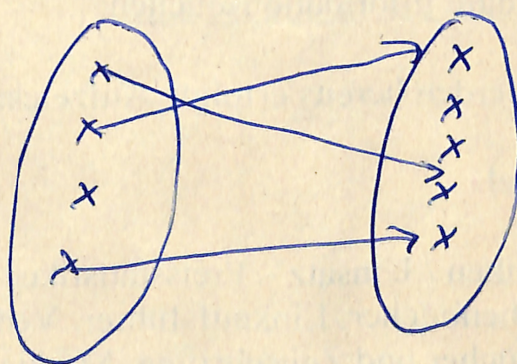
Die eindeutigen und eineindeutigen Abbildungen werden als Funktionen bezeichnet

Durch die Funktion f wird also jedem Element der Menge X höchstens ein Element der Menge Y zugeordnet. Die Urbildmenge X heißt jetzt der Definitionsbereich $D(f)$ der Funktion, während die Bildmenge als Wertebereich $W(f)$ der Funktion bezeichnet wird.

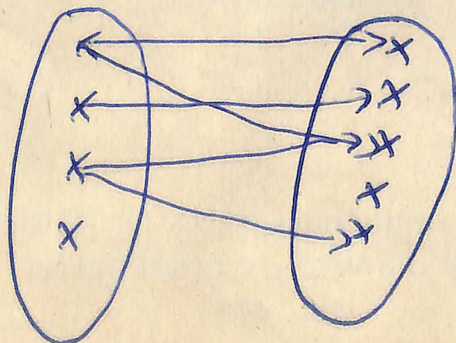
Wegen der Eindeutigkeit (bzw. Eineindeutigkeit) ist jedem Wert $x \in X$ höchstens ein Wert $y \in Y$ zugeordnet.



Eindeutige Relation



Eindeindeutige Relation



Mehrdeutige Relation

Der Definitionsbereich kann eine beliebige endliche oder unendliche Menge sein.

Häufig sind es die reellen Zahlen, die natürl. Zahlen oder Intervalle als Teilmengen dieser Mengen

BSP: Typische Definitionsbereiche sind:

$$x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 4; \forall x \geq 0$$

In vielen Fällen können wir Abbildungen zwischen den Elementen $x \in X$ und den Elementen $y \in Y$ in Form einer Gleichung beschreiben, z. B. $y = 2x^2 + 4$

Wir bezeichnen diese Relation dann als Funktionsgleichung. Um Anzuzeigen dass zwischen x und y eine Funktionsgleichung besteht, schreibt man allgemein $y = f(x)$ oder $x \rightarrow y = f(x)$

Nicht jede Funktion lässt sich als Gleichung schreiben und nicht jede Funktion stellt eine Gleichung dar.

Man behilft sich dann mit Werttabellen

$x^2 + y^2 = 1$ stellt keine Funktion dar

$y = f(x)$ → Funktionsgleichung

Das Argument x als auch der Funktionswert y sind veränderliche Größen.

Variable x ist → unabhängige veränderliche Variable, die frei aus dem Definitionsbereich gewählt werden kann

y ist abhängige die sich über die Funktion aus dem Wert des Arguments ergibt.

Funktionen mit einer Veränderlichen

— u —	tausend — u —
— u —	unendlich — u —

- Kann eine Funktion in der Form $y = f(x)$ dargestellt werden, d.h. ist die abhängige Veränderliche auf der einen Seite isolierbar, und besteht die andere Seite ausschließlich aus Beziehungen zwischen den unabhängigen Veränderlichen, so wird die Funktionsgleichung explizit genannt.

Z.B. ist die Funktion $y = x^2 \cdot a^{x+1}$ eine

• Funktionsgleichung in expliziter Form

- Häufig sieht man jedoch auch Funktionen der Form $y - f(x) = 0$ oder allgemein $f(x, y) = 0$

Diese Schreibweise wird als implizite

Funktionsgleichung bezeichnet.

• Entsprechend kann man in dieser Darstellung nicht mehr zwischen der abhängigen und unabhängigen Veränderlichen unterscheiden

Im realen Fall kann man ~~allerdings~~ allenfalls vom inhaltlichen Standpunkt auf die abhängige Veränderliche schließen.