

①

reelle Zahlen - unjüngst

- bilden eine geordnete Menge
- Zwischen je zwei von ihnen ($A \cup B$) besteht stets eine und nur eine der drei Beziehungen

für Alle a, b gilt:

$$a < b \vee a = b \vee b < a$$

Monotoniegesetze

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \checkmark$$

→ Monotonie der Addition

$$a < b \stackrel{1 \neq 0}{\Rightarrow} ac < bc \quad \checkmark$$

Monotonie der Multiplikation

$$a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc \quad \checkmark$$

$$a < b \wedge ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad \checkmark$$

$$ab > 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$ab < 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$$

$$a \leq a < b \Rightarrow a^n < b^n$$

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

Satz 2.5.5. Dreiecksungleichungen 1: für alle $a, b \in \mathbb{R}$

* diese Stelle soll bewiesen werden:

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

Beweis

$$\left. \begin{array}{l} a \leq |a| \\ b \leq |b| \end{array} \right\} a + b \leq |a| + |b|$$

$$\Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$\left. \begin{array}{l} -a \leq |a| \\ -b \leq |b| \end{array} \right\} -a - b = -(a + b) \leq |a| + |b|$$

Intervalle

Bsp: $|x| \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 2 \wedge x \geq -2$

alle Punkte vom Nullpunkt deren Betrag ≥ 2 ist

2.5.7 (Umgebungen)

offenes Intervall

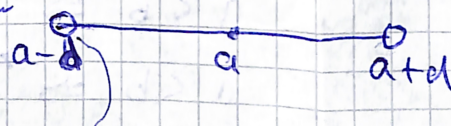
$$U_d(a) = \{x \mid |x-a| < d\}$$

Mittelpunkt

Abstand aller x von a der kleiner d ist

wie weit muss man von a weggehen
(Abstand $2 \times d$ ($+d, -d$))

d -Umgebung von a



$$I = \{x \mid 0 < x-a < d\} \text{ punkt}$$

Punktierte D -Umgebung von a



rechts / linksseitige Umgebung

$$U_d^{(r)}(a) := \{x \mid x-a < d\} \text{ rechts}$$

$$U_d^{(l)}(a) := \{x \mid a < a-x < d\} \text{ links}$$

Satz 2.5.8 (Potenzgesetze): $a, b \in \mathbb{R}^+$; $x, y \in \mathbb{R}$

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad ; \quad a^x : a^y = a^{x-y} \quad ; \quad a^x b^x = (ab)^x$$

$$a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x \quad , \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$a > b > 0 \wedge x > 0 \Rightarrow a^x > b^x$$

②

$$a > b > 0 \wedge x < 0 \Rightarrow a^x < b^x$$

$$a > 1 \wedge x < y \Rightarrow a^x < a^y$$

$$0 < a < 1 \wedge x < y \Rightarrow a^x > a^y$$

Exponentialgleichung (da x im Exponenten)

$$2^x = 8$$

Lösungswert 3

Der Log. von 8 zur Basis 2 ist 3

Logarithmen sind Hochzahlen

Statt $a^x = b$

Def: 2.5.9 : $x = a \log b \quad : \Leftrightarrow$

$$a^x = b \quad (0 < a \neq 1)$$

$$10 \log x =: \lg x;$$

dekadischer Log.

10er Log.

$$e \log x =: \ln x$$

Eulersche Log.

Satz 2.5.10 (Rechengesetze für Log.)

$$0 < a \neq 1 : x, y \in \mathbb{R}^+$$

$$a \log (x \cdot y) = a \log x + a \log y$$

$$a \log \frac{x}{y} = a \log x - a \log y$$

$$a \log x^y = y a \log x \quad (y \in \mathbb{R})$$

Bsp:

$$\frac{3}{x+1} < -4 \Leftrightarrow (3 < -4x - 4 \wedge x+1 > 0) \vee (3 > -4x - 4 \wedge x+1 < 0)$$

Wasser:

$$\Leftrightarrow (7 < -4x \wedge x > -1) \vee (7 > -4x \wedge x < -1)$$

$$\Leftrightarrow (x < -\frac{7}{4} \wedge x > -1) \vee (x > -\frac{7}{4} \wedge x < -1)$$

$$\Leftrightarrow L = \emptyset \cup]-\frac{7}{4}, -1[\quad =]-\frac{7}{4}, -1[$$

$$= \left\{ x \mid -\frac{7}{4} < x < -1 \right\}$$

1. Fall $x+1 > 0$

2. Fall $x+1 < 0$

Def 2.5.11 (Fakultät):

$$0! := 1 \quad n! := n(n-1)! \quad (n \in \mathbb{N})$$

rekursive Definition

Bsp $5! = \prod_{i=1}^5 i = 120$

$i=1$ $i=2$ $i=3$ $i=4$ $i=5$

1 von 1

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = \underline{\underline{120}}$$

③

Def 2.5.12 (Binomialkoeffizienten)

un

$$n, k \in \mathbb{N}_0$$

$$n \geq k$$

n über k

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad ; \quad n \geq k$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Pascalsche Dreieck

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{0}{0}$$

zeilenindex

$$\binom{1}{0}$$

$$\binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}$$

$$\binom{2}{1}$$

$$\binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} = 1$$

$$\binom{3}{1} = 3$$

$$\binom{3}{2} = 3$$

$$\binom{3}{3} = 1$$

unendliche Dreieck

$$\frac{3}{3-1} = \frac{3}{2} = 3$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{3-1} = 3$$

Satz 2.5.13 $n, k \in \mathbb{N}_0, n > k$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Beweis: $\Rightarrow$ Übung

Satz 2.5.14 (binomischer Lehrsatz)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\bigwedge_{a,b \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

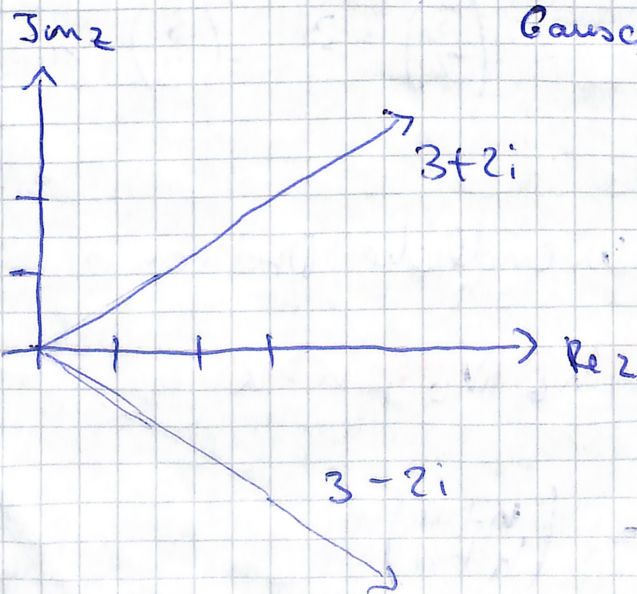
Beweis: Bäume über vollst. Induktion

2.6. Die komplexen Zahlen

$$x^2 + 5 = 0 \quad \text{ist in } \mathbb{R} \text{ nicht lösbar}$$

$$C := \{ (x+iy) \mid x \in \mathbb{R} \mid y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1 \}$$

$z = i y$ $x = \text{Realteil } z$ $i = \text{imaginäre Einheit}$
 $y = \text{Imaginärteil von } z$



Gausche Zahlenreihe

$$\bar{z} := x - iy$$

$\bar{z}$ Konjugiert Komplexe Zahl

$$④ |z| := \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

dann multiplizieren

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$$

3. Folgen und Reihen

3.1. Folgen

Def 3.1.1. Eine Abbildung f der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ in $\mathbb{R}$ heißt endliche Zahlenfolge;
eine Abb. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt unendliche Zahlenfolge

B. $f(n) =: (a_n)$ — n -te Glied der Zahlenfolge
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow$ eine unendl. Zahlenfolge mit den Gliedern a_n

Bsp

$$(2n-1) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = 5$$

} Folge der ungeraden Zahlen

+ 4 9 16 25 36 49 64 81 100

Bsp2

$$b_n = \frac{1}{n^2} - 3$$

$$b_1 = -2$$

$$b_2 = \frac{1}{4} - 3 \dots$$

$$b_3 =$$

$$\begin{array}{c} | \\ \hline b_1 \end{array}$$

Rekursive Form einer Def.

Bsp3 $a_1 = 3 \quad a_n = a_{n-1} + 5$

um also herauszubekommen muss man a_{49} berechnen
 $n = a_{49} \quad \quad \quad - n - \quad \quad \quad a_{48} - n -$

Def 3.1.2 Eine Zahl

$$k_0 \in \mathbb{R} \quad (\quad \quad \quad k_n \in \mathbb{R}$$

heißt genau dann obere $\vee$ untere
 Schranke einer Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wenn
 für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \leq k_0 \quad | \quad a_n \geq k_n$$

Bsp $(2n-1)_{n \in \mathbb{N}}$

keine obere Schranke vorhanden!

- 10 ist eine untere Schranke (man muss keine
beste, bestimmte
 untere Schranke
 angeben.

Bem:

hat man eine obere Schranke gefunden, so ist auch jede grössere Zahl die größer als ϵ_n ist obere

Schranke

Def 3.1.3

Die kleinste obere Schranke einer Zahlenfolge heißt obere Grenze (Supremum)

die größte untere Schranke heißt untere Grenze (Infimum) der Zahlenfolge.

$$\text{Bsp: } \sup \left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = 1 \rightarrow \text{kleinste obere Schranke}$$

$$\inf \left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = 0$$

Def 3.1.4

Eine Zahlenfolge heißt genau dann beschränkt wenn Sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Bem:

nicht jede ZF ist beschränkt

BSP:

Folge der ungeraden Zahlen ist nach unten aber nicht nach oben beschränkt
 $\Rightarrow$ nicht beschränkt

Def 3.1.5

Eine ZF heißt genau dann arithmetisch wenn die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder gleich sind

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ heißt arithmetisch: } \Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{R} \quad a_{n+1} - a_n = d$$

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \dots$$