

7. Vorlesung (1)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arithmetisch: $\Leftrightarrow \forall \frac{1}{d \in \mathbb{R}, d \neq 0} a_{n+1} - a_n = d$

Satz 3.1.6: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine arithmetische Zahlenfolge $\mathbb{Z} \mathbb{F}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Beweis: (vollst. Induktion): I $n=1$: $a_1 = a_1 + 0 \cdot d$

Ind. Behauptung II

Beweis

$$\text{II}_c) a_{n+1} \underset{\substack{\text{Def.} \\ \text{arithm. Folge}}}{=} a_n + d \underset{\substack{\text{Ind.} \\ \text{Vorr.}}}{=} a_1 + (n-1)d + d$$

$$= a_1 + nd$$

Satz 3.1.7 In einer arithmetischen Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist jedes Glied mit $n \geq 2$ das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarglieder

Bew. $\frac{a_{(n-1)} + a_{(n+1)}}{2}$

Arithm. ZF: Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder deren Glieder konstant ist, heißt arithm. Folge

Folge der Finanzmathematik: eine ZF heißt genau dann geometrisch (wenn die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder gleich sind)

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ geometrisch: } \Leftrightarrow \forall \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, q \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

es darf kein Glied = 0 sein!

Bsp: 16, 24, 36, 54, ...

Satz 3.1.9: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geometrisch $\Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Beweis: vollst. Ind.

Satz 3.1.10: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine geometrische Zahlenfolge mit positiven Gliedern, so ist jedes a_n mit $n \geq 2$ das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarglieder.

$$\begin{aligned} \text{Bew: } \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot a_{n-1}} &\stackrel{3.1.9}{=} \sqrt[n]{a_1 q^n \cdot a_1 q^{n-2}} = \sqrt[n]{a_1^2 q^{2n-2}} = \sqrt[n]{a_1^2 q^{2(n-1)}} \\ &= a_1 q^{n-1} = a_n \end{aligned}$$

Man muss ind. Kon nicht mehr über vollst. Ind. beweisen.

Satz 3.1.11: Jedes Glied der harmonischen Folge

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $n \geq 2$ ist das harmonische

Mittel seiner beiden Nachbarglieder

$$\text{Bew: durch Nachrechnen } M_n(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Satz 3.1.12: Eine geometrische ZF $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann beschränkt (wenn gilt) $|q| \leq 1$

muss erfüllt sein
Bew: a) hinreichend $|q| \leq 1 \Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |a_n| = |a_1| \cdot |q|^{n-1} \leq |a_1| \cdot 1$

$$\text{d.h. } K_0 = |a_1| \quad K_n = -|a_1|$$

b) notw. z.z. (Kontraposition)

(2)

$|q| > 1 = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschr.

$$\bigwedge_{K > 0} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \geq K$$

$$|a_n| = |a_1| |q|^{n-1} \geq K \Leftrightarrow |q|^{n-1} > \frac{K}{|a_1|}$$

$$\Leftrightarrow (n-1) \log |q| > \log \frac{K}{|a_1|}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \text{hängt von} \\ K \text{ ab} \\ n \end{matrix} > \frac{\log \frac{K}{|a_1|}}{\log |q|} + 1$$

Def 3.1.13: Eine Zahl h heißt genau dann Häufungspunkt einer ZF, wenn in jeder ε -Umgebung von h unendlich viele Glieder der Folge liegen

Bsp: $a_n = (-1)^n$ $-1, 1, -1, \dots$ $\{-1, 1\}$

$h_1 = 1$ $h_2 = -1$

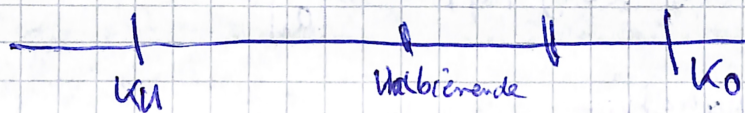
~~$h_3 = 1$~~ $\rightarrow$ kein HF von der ZF

man grenzt ein Intervall ab (z.B. 0 und 0,1) sind unendlich viele Elemente enthalten)

Hat jede Folge einen H.P. $\rightarrow$ man
nur beschränkte

Satz 3.1.14: Jede beschränkte unendliche Folge
hat mind einen H.P.

Bew: Halbierungsmethode



In mind. einer Hälfte müssen unendl. viele
Elemente sein

Gesucht wird ein Intervall wobei unendl.
viele Elemente gibt.

auch in vierstel muss es unendl. viele Elemente
geben

Grenzwert

Def 3.15: Besitzt eine beschränkte ZF $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
genau einen H.P. g , so heißt g Grenzwert der
Folge.

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$$

a_n strebt gegen g

$\lim$ ist Grenzwert

ohne $\lim$ strebt gegen g

Die Folge a_n ~~ist~~ konvergiert zum Grenzwert g :

Ist $g = 0$ spricht man von einer Nullfolge

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \iff \overset{\text{Epsilon}}{\varepsilon} > 0 \quad |a_n - g| < \varepsilon$$

$$\iff \bigwedge \varepsilon > 0 \quad \bigvee \bigwedge N(\varepsilon) \quad n \in \mathbb{N} \quad n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon$$

Für alle Folgeglieder liegen in einer ε -Folge von $g \rightarrow$ Grenzwertbegriff

BSP: Harmonische Folge $g = 0$

Der Grenzwert muss kein Folgeglied sein

Def 3.1.16 Eine ZF heißt genau dann divergent wenn sie nicht konvergent ist.

Satz 3.1.17: Die Grenzwertbildung ist ein linearer Operator

$\rightarrow$ Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konv. ZF so ist auch $(a_n \pm b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente ZF und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

nicht teilen da man durch null teilt, teilen kann (falls einige Glieder null sind)

Bem1: ^{nur} wenn $b \neq 0$

Bem2: man muss die Existenz von beiden
Gleichem voraussetzen

$$\text{Bsp: } \lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n + (-1)^{n+1}) = (-1)^n + (-1)^{n+1}$$

! Konvergieren nicht!

Beweis: Beckmann Künzi 1. Band

Bsp:

$$1. \quad 0 < |q| < 1; \quad |a_n q^n| < \underbrace{(\varepsilon)}_{\text{Epsilon}}$$

Grenzwert $\neq$ null

$$\Leftrightarrow \log |a_n| + n \log |q| < \log \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\log \varepsilon - \log \varepsilon |a_n|}{\log |q|} = N(\varepsilon)$$

$$\text{Bsp2)} \quad a > 1; \quad \sqrt[n]{a} - 1 < \underbrace{(\varepsilon)}$$

beliebige Zahl Epsilon

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \log a < \log(1 + \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\log a}{\log(1 + \varepsilon)} = N(\varepsilon)$$

Bsp 3:

mit n potenzieren

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 = a_n \Leftrightarrow (a_n + 1)^n = n$$

$$= 1 + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \dots$$
$$\dots \binom{n}{n} a_n^n$$

2te da 2 mal n

$$> \binom{n}{2} a_n^2$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \leq n \Rightarrow 0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{(n-1)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$\frac{1}{n}$ geht gegen 0

$$(1+0)^n = 1 \text{ deshalb}$$

Zahl < 1 da wird diese größer
deshalb gleichzeitig gegen ∞