

8. Vorlesung

ZF

$N \rightarrow \mathbb{R}$

jeder nat. Zahl wird eine reelle Zahl zugeordnet

arithmetisch

(die gl. Zahl wird add.)

geometrisch

(die gleiche Zahl wird multipliziert)

harmonisch

HP

Grenzwert

4. $\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$\rightarrow$ Konvergiert gegen 0

$\rightarrow$ Kein Folgenglied 0

Infinität

$$n \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{n}{(1+5)^n} = \frac{n}{\frac{n}{0} + \binom{n}{1}5 + \binom{n}{2}5^2 + \dots + \binom{n}{n}5^n}$$

" $\infty \cdot 0$ "

unbestimmten Ausdruck $\rightarrow$ ohne Def.

$$< \frac{n \cdot 2}{n(n-1)25} = \frac{2}{25(n-1)} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{2}{25\varepsilon} + 1 = N(\varepsilon)$$

$$3n \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3$$

" $\infty \cdot 0$ "

unbestimmter Ausdruck

5) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ Grenzwert 1

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$
 ↙ Eulersche Zahl

6. Technik der Grenzwertbestimmung

$$\frac{-5n^3 + \pi n^2 + \sqrt{7n}}{4n^3 + 12n} = \frac{n^3 \left(5 + \frac{\pi}{n} + \frac{\sqrt{7n}}{n^3}\right)}{n^3 \left(4 + \frac{12}{n^2}\right)}$$

↗ strebt gegen 0

$$= \frac{-5 + \frac{\pi}{n} + \sqrt{\frac{7}{n^5}}}{4 + \frac{12}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{-5 + 0 + 0}{4 + 0} = -\frac{5}{4}$$

↗ strebt gegen 0
↘ strebt gegen 0

Grenzwert

3.2 Reihen

Def 3.2.1: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine ZF, so heißt

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{eine endliche Reihe}$$

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine ^{arithm.} geom. ZF, so heißt ^{harm.}

s_n eine endliche ^{arithm.} geom. Reihe ^{harm.}

Satz 3.2.2 Für jede endliche arithmetische Reihe gilt:

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

Bew: vollst. Ind. I) $S_1 = \frac{1}{2} (a_1 + a_n) = a_1$

II a) Ind. Vor., II b) Ind. Beh. II c) Beweis

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) + a_{n+1}$$

$$= \frac{n}{2} (a_1 + a_1 + (n-1)d) + a_{n+1}$$

$$= \frac{n}{2} (a_1 + a_1 + (n-1)d) + a_1 + nd$$

$$= (n+1)a_1 + \left(\frac{n(n-1)}{2} + n \right) d$$

ausklammern & zusammenfassen
ausgeklammert

$$= (n+1)a_1 + \frac{n(n+1)}{2} d$$

$$= \frac{n+1}{2} (a_1 + a_1 + nd) \stackrel{3.1.6}{=} \frac{n+1}{2} (a_1 + a_{n+1})$$

BSP $\sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2} (n+1)$

Satz 3.2.3 : Für jede endliche geom. Reihe mit $q \neq 1$ gilt:
 $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Bew (vollst. Ind.) I) $S_1 = a_1 \frac{q-1}{q-1} = a_1$

II c) $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + a_1 q^n$

Ind. Vor. 3.1.7

$$= a_1 \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q - 1} = a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Def 3.2.4: Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine ZF. Falls die ZF $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zum GW konvergiert, heißt die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ konvergent, und man schreibt

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k;$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ heißt die } n\text{-te Partial-}$$

summe der unendlichen Reihe.

Die unendl. Reihe konvergiert genau dann zum Grenzwert S wenn die Folge ihrer Partialsummen gegen S konvergiert.

BSP: ~~111~~ $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Satz 3.2.5: Bei einer konvergenz unendlichen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ notwendig eine Nullfolge

Bew: $\left. \begin{array}{l} S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S \\ S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S \end{array} \right\} S_n - S_{n-1} = a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

Bem:

Die Bedingung $a_n \rightarrow 0$ ist nicht hinreichend, nur notwendig

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$$

Konvergenz nicht $\rightarrow$ divergiert

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} >$$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$$

$$\text{Bem: } S_{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Beweis durch vollst. Ind.

Satz 3.2.6: Eine unendl. geometr. Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} \text{ ist genau dann konvergent}$$

wenn $|q| < 1$ ist. Es gilt dann

$\rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q} =$$

Beweis hinreichend: $|q| < 1 \Rightarrow S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{1-q}$

3.2.3

notwendige Teil (Kontraposition):

$$|q| \geq 1 \Rightarrow (a_1 q^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$$

Keine Nullfolge

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} \text{ nicht konvergiert}$$

3.2.5

3.3 Anwendungen in der Finanzmathematik

Unter Zinsen versteht man die Vergütung,

werden für DM 100,- Kapital p Zinsen gezahlt $\rightarrow$ Das Kapital ist zu $p\%$ ausgeliehen.

- Einfacher Zins e .

- werden die auf ein ausgeliehenes Kap. aufgeschlagenen Zinsen

dem Anfangskap. zugeschlagen $\rightarrow$ Kapitalisiert und danach mit Zinseszins spricht man von Zinseszins.

Satz 3.3.1 (Zinseszinsen): Ein Kapital K_0 wächst beim (dekursiven) Zinssatz von $p\%$ in n Jahren auf $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ an;

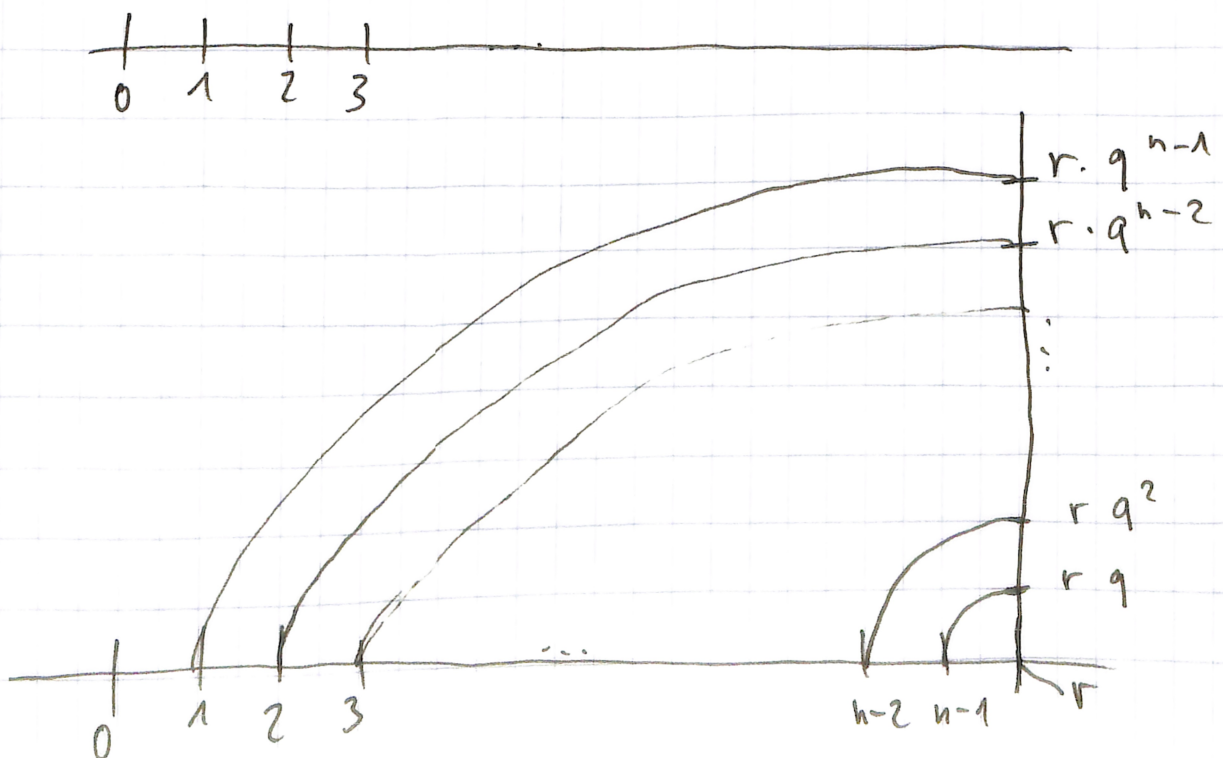
$(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine geometr. Zf. mit $q := 1 + \frac{p}{100}$ (Zinsfaktor, Aufzinsungsfaktor).

Der Barwert K_0 (Diskontieren) einer in n -Jahren fälligen Forderung beträgt

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n}; \quad v = \frac{1}{q} \text{ Abzinsungsfaktor}$$

Caprano $\rightarrow$ Zinstabellen

Renten $\rightarrow$ gleichwertig wiederkehrende Zahlungen



$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} r q^k = r \frac{q^n - 1}{q - 1} = r S_n$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

nachschüssiger
Renten entwertfaktor