

①

9. Vorlesung

Folgen $\frac{a}{g}$

einfacher Zins

Zuwachs

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

Abzinsungsfaktoren

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik
Zinstabellen

Rente

Def: Eine in gleichen Zeitabständen regelmäßig wiederkehrende Leistung oder Zahlung (unbeschränkt in gleicher Höhe) heißt Rente

Bem: Rentenreihe R
Rentenrate r

Rentenperioden und Zinsperioden stimmen überein.

Satz 3.3.3 (Endwert einer nachschüssigen Rente)

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} r q^k = r \frac{q^n - 1}{q - 1} = r s_n$$

nachschüssige Rentenendwertfaktor

Zeitpunkte
Zeitintervalle

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

nachschüssiger
Rentenendwertfaktor

n: nachschüssig wird am Schluss der Periode gez.
E:

Barwert

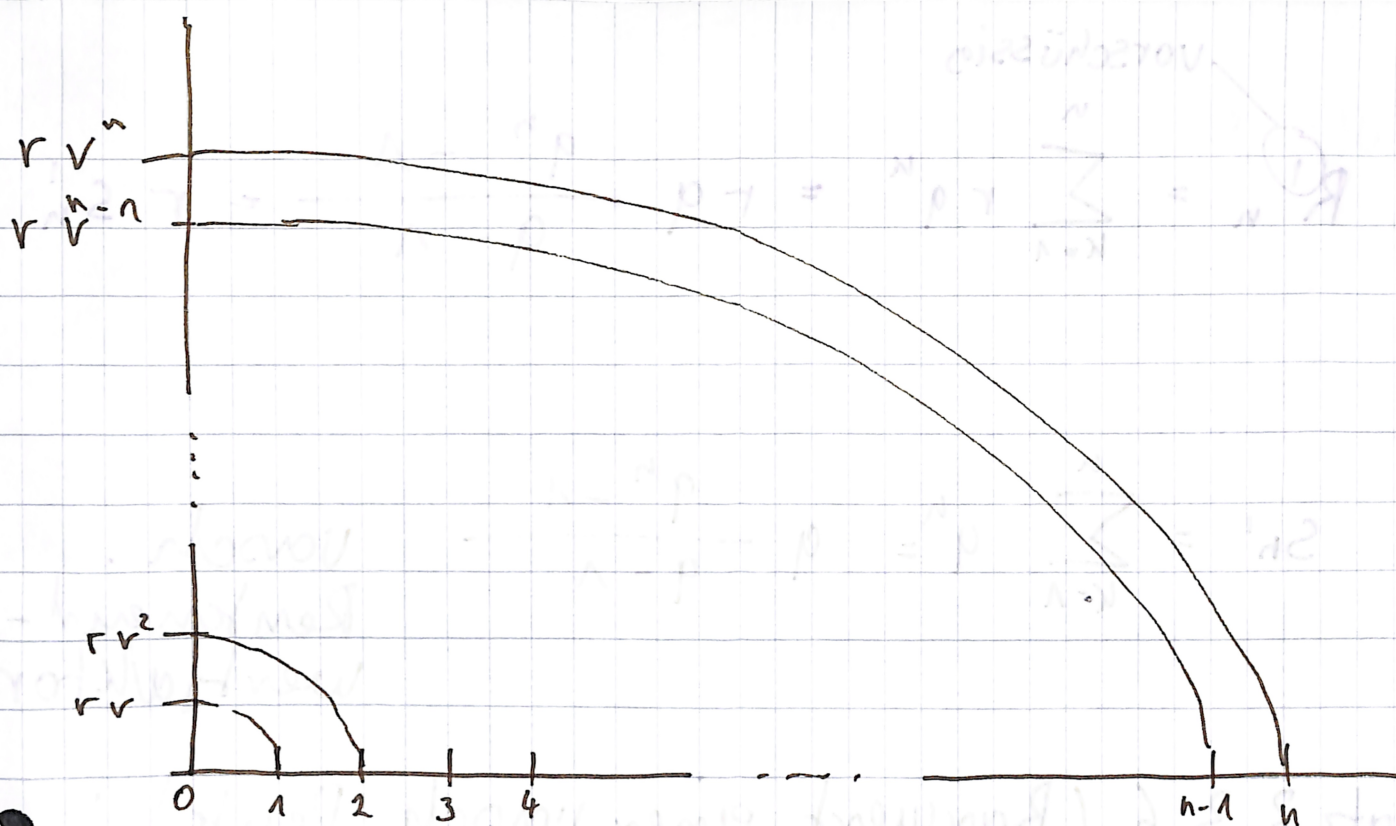
Satz 3.3.4 (Barwert einer nachschüssigen Rente):

$$R_0 = \frac{R_n}{q^n} = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r a_n$$

$$a_n = \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

nachschüssiger
Rentenbarwertfaktor

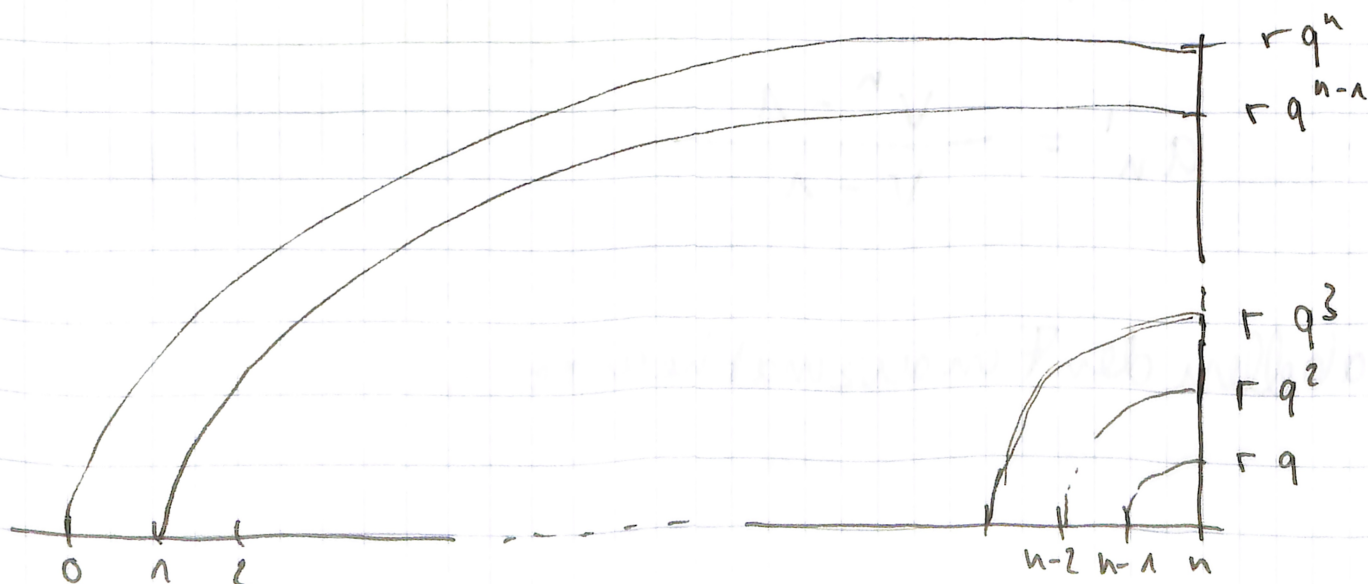




$$R_0 = \sum_{k=1}^n r v^k = r v \frac{v^n - 1}{v - 1} \quad \text{id.h.}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n v^k$$

Satz 3.3.5 (Endwert einer vorschüssigen Rente):



vorschüssig

$$R'_n = \sum_{k=1}^n r q^k = r q \frac{q^n - 1}{q - 1} = r s'_n$$

$$s'_n = \sum_{k=1}^n q^k = q \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

vorsch.
Rentenend-
wertfaktor

Satz 3.3.6 (Barwert einer vorsch. Rente): ●

$$R'_0 = \frac{R'_n}{q^n} = \frac{r}{q^{n-1}} \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

~~duh~~ = ~~HA~~

$$a_n' = \frac{1}{q^{n-1}} \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

vorsch. Rentenbarwert
faktor.

$$R'_0 = \sum_{k=1}^n r v^{n-k} = r \frac{v^n - 1}{v - 1}$$

$$a_n' = \frac{v^n - 1}{v - 1}$$

Tabellen der Finanzmathematik

2

$$S'_n = S_n q = a_n' q^n = a_n q^{n+1} = S_{n+1} - 1 =$$

$$S'_{n+1} = q^n = (1 + S_{n-1}') q$$

Satz 3.3 z. (Sparer - Rentenformel):

Betrag der eingezahlt od. abgehoben wird.

$$K_n = K_0 q^n \pm \left(r S_n \right)$$

$$K_n = K_0$$

Ansatz der ewigen Rente

$$K_0 = K_0 q^n - r S_n \Leftrightarrow K_0 (1 - q^n)$$

$$\Leftrightarrow K_0 (q^n - 1) = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\Leftrightarrow r = K_0 \cdot \underbrace{\frac{p}{100}}$$

Zinsen von Anfangs Kapital

4. lineare Algebra

4.1. lineare Gleichungssystem und Gaußscher Algorithmus

Def 4.1.1 Eine lineare Gleichung
 $3x - 7x = 15$

$$3x - 7y + \sqrt{2}z = 15$$

$$x_1 x_2 x_3 \dots$$

$$\text{ist } a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

ist eine Aussageform in den Variablen $x_1, \dots, x_n$ mit den Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ ($k=1, \dots, n$) und der rechten Seite $b \in \mathbb{R}$. Die Menge aller n -Tupel, bei deren Einsetzung die Aussageform in eine wahre Aussage übergeht, heißt Lösungsmenge von (1).

$$3x - 7y + 2z = 15$$

$$(0, 0, \frac{15}{2}) \in L$$

$$(1, 0, \frac{6}{7}) \in L$$

Def 4.1.2: Umformungen einer lin. Gleichung die ihre Lösungsmenge nicht ändern heißen Äquivalenzumformungen

Satz 4.1.3 Äquivalenzumformungen einer lin. Gleichung sind Addition desselben Terms auf beiden Seiten der Gleichung.

Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit derselben Zahl verschieden von 0.

Bem.: Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung

$$x = -1$$
$$x^2 = (-1)^2$$

$$L = \{-1\}$$
$$L = \{1, -1\}$$

Def 4.1.4 Eine Konjunktive AF von m Gleichungen ($m \geq 2$) in n Variablen $x_1, \dots, x_n$ heißt genau dann lineares Gleichungssystem in n Variablen, wenn sie durch Äquivalenzumformungen auf die Form

→ nicht auf sondern einz-einz

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

gebildet werden kann.

$$\left(\begin{array}{l} a_{ik}, b_i \in \mathbb{R} \\ 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq k \leq n \end{array} \right)$$

- Bem: 1. a_{ik} heissen Koeffizienten des Systems
 2. Die Lsg des lin Gl Sys ist der Durchschnitt der Lsg der m -Gleichungen

$$l \in L_1 \wedge l \in L_2 \wedge \dots \wedge l \in L_n \Leftrightarrow l \in L = \bigcap_{i=1}^n L_i$$

Satz 4.1.5 Äquivalenzumformungen eines linearen Gleichungssystems, die seine Lösungsmenge nicht ändern, sind

- Ersetzen einer der Gleichungen durch eine äquivalente
- Vertauschen von zwei Gleichungen
- Ersetzen einer der Gleichungen durch ihre Summe mit einer anderen Gleichung des Systems.

Der Koeffizient muss 1 sein!

1)	$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$	$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$
2)	$-x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$	$x_3 = 2$
3)	$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \Leftrightarrow$	$-2x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 5$
4)	$-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5$	$-x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 5$

- W2) 1. Gl. mit 2. Addieren
 W3) 1. Gl. mit 4 ^{minus} und Erg. mit 3. Gl. Addieren
 W4) 1. Gl. mit +2 multiplizieren

3

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 + 4x_3 - 4x_4 = -5$$

$$x_3 = 2$$

$$14x_3 - 11x_4 = -5$$

$$2x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 5$$

und mit $x_2 + 4x_3 - 4x_4 \quad | \cdot 2$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 + 4x_3 - 4x_4 = -5$$

$$x_3 = 2$$

$$14x_3 - 11x_4 = -5$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 - 4x_3 - 4x_4 = -5$$

$$x_3 = 2$$

$$-11x_4 = -33$$

$$L = \{ (0, -1, 2, 3) \}$$