

①

Klausur

Satz: $d(f \pm g) = df \pm dg$

$$d(f \cdot g) = g df + f dg$$

$$d \frac{f}{g} = \frac{g df - f dg}{g^2}$$

Bew: $n=2$ $df_g = (fg)_{x_1} h_1 + (fg)_{x_2} h_2 = f_{x_1} g$

$$= (f_{x_1} g + g_{x_1} f) h_1 + (f_{x_2} g + g_{x_2} f) h_2$$

$$= g(f_{x_1} h_1 + g_{x_1} h_1) + f(g_{x_1} h_1 + g_{x_2} h_2) = g df + f dg$$

8.5. Extrema

Satz 8.5.1: Es sei f in einer Umgebung $U(a) \subseteq \mathbb{R}^n$ diffbar und besitze dort sämtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung. Notwendig dafür dass f an a ein lokales Extremum besitzt, ist $f_{x_1}(a) = f_{x_2}(a) = \dots = f_n(a) = 0$

Bem: nicht hinreichend

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2$$

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = -2x_1$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) = 2x_2$$

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = f_{x_2}(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f(x_1, 0) = -\frac{1}{2}x_1^2 < 0$$

$$f(0, x_2) = x_2^2 > 0$$

Satz 8.52: Eine Funktion f besitze $U(a) \subseteq \mathbb{R}^2$
 stetig partielle Ableitungen 1. und 2.
 Ordnung.

Dann ist die Bedingung

$$f_{x_1}(a_1, a_2) = f_{x_2}(a_1, a_2) = 0 \wedge f_{x_1 x_1}(a_1, a_2) f_{x_2 x_2}(a_1, a_2) - f_{x_1 x_2}^2(a_1, a_2) > 0$$

hinreichend dafür, daß f an a ein
 lokales Extremum besitzt, und zwar ein
 lokales Maximum im Fall $f_{x_1 x_1}(a_1, a_2) < 0$,
 und damit auch $f_{x_2 x_2}(a_1, a_2) < 0$
 und ein lokales Min im Fall
 $f_{x_1 x_1}(a_1, a_2) > 0$ (und damit auch
 $f_{x_2 x_2}(a_1, a_2) > 0$).

Bem

: 1 ist d. klein null liegt kein Extremum
 Ist $D = 0$ ist auf diese Weise keine
 Entscheidung möglich

2 Diese Bed. ist nicht notwendig
 für ein lok Extremum

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2$$

Min bei $(0,0)$ $D=0$

BSP: 1.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 - x_1 x_2 + x_2^2$$

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 - 1 - x_2 = 0$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{3}x_2 = \frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} f_{x_1 x_1}(x_1, x_2) &= 2 = f_{x_2 x_2}(x_1, x_2) \\ f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D = 3 > 0$$

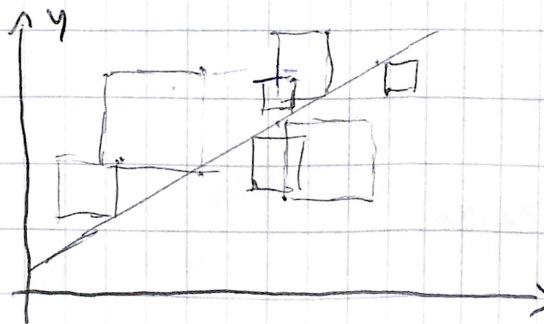
rel. Min
(auch abs. Min)

Berechnung abs. Min

$$f(x_1, x_2) = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$$

Berechnung des Max (es gibt kein relatives und kein abs. Max)

Methode der kleinsten Quadrate



- man hat verschiedene Punkte im Koordinatensystem und möchte die Gerade ermitteln die am besten passt zwischen den Punkten

$$y = f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$

AG

Die Fläche des Quadrates gibt an wie weit der Punkt von der Geraden entfernt ist.

Man legt eine ? Gerade und addiert die Fläche, ist die Gesamtfläche aller Quadrate klein (größer ist die Gerade günstiger (nicht günstiger)

welche Gerade besitzt die geringste Gesamtfläche aller Quadrate

$$\sum_{i=1}^n [y_i - f(x)]^2 \rightarrow \min$$

Forderung: $\sum_{i=1}^n [y_i - a - bx]^2 \min$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - a - bx] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - a - bx_i] x_i = 0$$

$$an + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Cramersche Regel:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n y_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix}}$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

$$D = \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} \right)^2 = 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (2 \sum_{i=1}^n x_i)^2 > 0$$

②

AT

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum$	

Satz 8.5.3 : f sei in $U(a) \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig und besitze dort stetige partielle Ableitungen

1. und 2. Ordnung. Es sei

$$D_i = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \dots & f_{x_1 x_i} \\ f_{x_2 x_1} & & f_{x_2 x_i} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_i x_1} & & f_{x_i x_i} \end{pmatrix}(a)$$

Hinreichend dafür, daß f an a ein lokales $\begin{matrix} \text{min} \\ \text{max} \end{matrix}$ besitzt, ist :

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} f_{x_i}(a) = 0 \quad \wedge \quad D_i > 0$$

$$\begin{aligned} (-1)^1 D_1 &> 0 \\ (-1)^2 D_2 &< 0 \\ (-1)^3 D_3 &> 0 \\ (-1)^4 D_4 &< 0 \end{aligned} \quad \text{alternierend}$$

Bem 1. $n=2$ 8.5.2 2. Hesse-Matrix
 $n=1$ 6.5.8

3. $\bigvee_{i,j} f_{x_i x_i}(a) < 0 < f_{x_j x_j}$ dann liegt
Kein rel. Extremum vor.

Bsp: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - 3x_1 + e^{-x_2^2 + 4x_2} - \sin x_3$

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) &= 3x_1^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_1 = -1 \\ f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) &= (-2x_2 + 4)e^{-x_2^2 + 4x_2} = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2 \\ f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) &= -\cos x_3 = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Kandidaten für ein Extremum sind

$$P_{1,k} = (1, 2, \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$P_{2,k} = (-1, 2, \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$f_{x_1 x_1}(x_1, x_2, x_3) = 6x_1$$

$$f_{x_2 x_2}(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_2^2 + 4x_2} (-2 + (-2x_2 + 4)^2)$$

$$f_{x_3 x_3}(x_1, x_2, x_3) = \sin x_3$$

$$f_{x_i x_j} = 0$$

$$i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j$$

Hesse Matrix

$$H(P_{1,k}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2e^4 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$H(P_{2,k}) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2e^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{x_1 x_1}(P_{1,k}) > 0$$

$$f_{x_2 x_2}(P_{1,k}) < 0$$

$$f_{x_3 x_3}(\quad) < 0$$

$$f_{x_3 x_3}(\quad) > 0$$

$\Rightarrow$ Keine
rel.
Extrema

Keine
rel.
Extrema

$$H(P_{2,2k}) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2e^4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = -6 < 0$$

$$D_2 = 12e^4 > 0$$

$$D_3 = -12e^4 < 0$$

$$\Rightarrow P_{2,2k+1} = \left(-1, 2, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$$

rel. Max mit
 $f(P_{2,2k+1}) =$ an unendlich
 vielen
 Stellen hat
 die Funktion
 relative
 Maxima