

Kettenregel:

$f(x) = [g(x)]^n$
 $f'(x) = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$
 $f(x) = e^{g(x)}$
 $f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$
 $f(x) = \ln g(x)$
 $f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$

$4z + 3z^2 \cdot g'(x)$
 $4(2+3i) + 3(4+2i)$
 $-8 - 12i + 12 + 6i$
 $4 - 6i$

$x = e^{\ln x}$
 $x^r = e^{r \ln x} = (e^{\ln x})^r$
 $f: e^{x \ln a}$
 $f: e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$

Exponentialfunktion

$f(x) = a^{g(x)}$
 $f'(x) = a^{g(x)} \ln a \cdot g'(x)$
 $f(x) = \log_a x$
 $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
 $f(x) = \log_a g(x)$
 $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \ln a$

Logarithmusfunktion

$f(x) = \log_a x$
 $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
 $f(x) = \log_a g(x)$
 $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \ln a$
 $f(x) = \ln x$
 $f'(x) = \frac{1}{x}$
 $f(x) = \ln g(x)$
 $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
 $f(x) = \sin x$
 $f'(x) = \cos x$
 $f(x) = \cos x$
 $f'(x) = -\sin x$
 $f(x) = \tan x$
 $f'(x) = \sec^2 x$
 $f(x) = \cot x$
 $f'(x) = -\csc^2 x$
 $f(x) = \arcsin x$
 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $f(x) = \arccos x$
 $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $f(x) = \arctan x$
 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
 $f(x) = \operatorname{arccot} x$
 $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$
 $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$\ln^2(3+x^4) = 2 \ln(3+x^4) \cdot \frac{1}{3+x^4} + 4x^3$

Umkehrfunktion

$f(x) = \sqrt{x}$
 $f^{-1}: x = y^2$ nach y diff.
 $f^{-1}(y) = 2y$
 $f(x) = f(2a-x)$
 $f(x) = f(2a-x)$
 $Lagrange$
 $L = (x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) +$
 $f(x_1, \dots, x_n)$
 $i^0 = i^4 = 1, i^2 = -1, i^3 = -i$
 $i^1 = i, i^4 = 1, i^3 = -i, i^2 = -1$
 $i^{-1} = -i, i^4 = 1, i^3 = -i, i^2 = -1$
 $i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$

totales Differential

$f(x,y,z) = 3x^2y + yz$
 $x = 5t^3 + 1, y = e^{2t}, z = \ln t$
 $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$
 $= 6xy \cdot 15t^2 + (3x^2 + z) \cdot 2e^{2t} + y \cdot \frac{1}{t}$
 $= 6(5t^3+1) \cdot 15t^2 + (3(5t^3+1)^2 + \ln t) \cdot 2e^{2t} + e^{2t} \cdot \frac{1}{t}$
 $\sin \pi = 0, \log a^b = b \log a$
 $\ln e = 1, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\ln 1 = 0, -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$
 $e^{\ln x} = x$
 $x = \ln(e^x)$
 $\ln(x^p) = p \ln x$
 $x^x = e^{x \ln x}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Spezialfälle Kettenregel

$e^{h(x)} \Rightarrow e^{-x} \Rightarrow -e^{-x}$
 $\log_b x = \log g^*$
 $\log_b g$
 $\log_5 100 =$
 $\ln 100$
 $\ln 5$
 $\lg 2x = \frac{2}{x}$

$z(x^2) = z(x^4) \cdot \ln 2 \cdot 2x$

Krümmungsverhalten

$f''(x) > 0$ f ist monoton wachsend
 $f''(x) < 0$ f ist monoton fallend
 $f''(x) > 0$ f ist konvex // min
 $f''(x) < 0$ f ist konkav // max

Wendepunkte
 f konvex, f' max, f' steigt
 f konkav, f' min, f' fällt

$f'(x) < 0$
 $f'''(x) > 0$

Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2,5\}$ (wo ist Nenner null?)
 Sym. Achsensym. $f(-x) = f(x)$, Punkt $f(-x) = -f(x)$
 1/5: $f(x) = 0$ auflösen / 4 Stetigkeit dort wo sie nicht definiert ist
 5 Differenzierbarkeit / ja oder nein
 6 Extremwert: $f'(x) = 0$ und

das Vorzeichen der 2. Ableitung $f''(x)$ überpr.
 (einschauen). Ist der Wert $(f''(x)) > 0$ u. min
 $f''(x) < 0$ rel. max
 Wendepunkte: $f'(x) = 0$ und das Vorzeichen
 $f''(x)$ überpr. (Erg. einschauen) s.o.

Monotonie u. Krümmung: Man ermittelt die
 Bereiche in denen f bzw. $f''(x)$ positiv bzw. negativ
 sind $f(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$; $f(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow$; $f''(x) > 0 \Rightarrow$
 Konvex; $f''(x) < 0 \Rightarrow$ Konkav
 Verhalten an den Randstellen bzw. $\pm \infty$ / Wertetab.
 Zeichnung und Fertig!

Sattelpunkt $f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$
 $f_{xx} x_i > 0$ monoton zunehmend
 $f_{xx} x_i < 0$ monoton abnehmend

$z_1 = 2+3i; z_2 = 4-2i$
 $\frac{z_1 - i}{i \cdot i - z_2} = \frac{2+3i-i}{i \cdot i - (4-2i)} = \frac{2+2i}{-1-4+2i} = \frac{2+2i}{-5+2i}$
 $= \frac{4+4i-i}{i(i-4+2i)} = \frac{4+3i}{i(3i-4)} = \frac{4+3i}{3i^2-4i} = \frac{4+3i}{-3-4i}$
 $= \frac{4+3i}{-3-4i} \cdot \frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-12+16i-9+12i}{9-16} = \frac{-21+28i}{-7} = 3-4i$
 # 25
 Imaginärteil
 Realteil

$\frac{1+5i}{3+2i} = \frac{(1+5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3+10i+15-10i}{9-4} = \frac{18}{5} = 3.6$

geometrische Summenformel
 $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

arithm. Summenformeln
 $\sum_{k=1}^n (a_k+b) = a \frac{n(n+1)}{2} + n \cdot b$
 $\sum_{k=1}^{80} (3k+4) = 3 \cdot \frac{80 \cdot 81}{2} + 80 \cdot 4$

geometrische Folge:
 $a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, \dots, a_1 \cdot q^n$
 $a =$ Anfangsglied

arithm. Folge - Differenz gleichble.
 $2, 8, 14, 20, 26, \dots +6$ $a + (n-1) \cdot d$
 geom. Reihe: $2, 6, 18, 54$ Quotient 3 (bleibt gleich)
 $S = \frac{a(q^n-1)}{q-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$

arithm. Reihe: $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \dots$
 $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$

Zähler in y-Richtung // Nenner in x-Richtung

Vorsch. Verzinsung | Vorsch. ZS, dererener
nachsch. Verz. entspr.

Kommutativgesetz $A \cup B = B \cup A$
Assoziativ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributiv $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$i = ZS$
 8%

$K_n = \frac{K_0}{(1-i)^n}$

$i = \frac{1}{1-j}$

$q = 1 + \frac{i}{100}$

$K_n = K_0 \cdot q^n$

allgemeine Zinsformel Aufzinsung
Wachstums

$K_0 = \frac{K_n}{q^n} = K_n \cdot v^n$

allg. Zf Abzinsung
Wachst.

Kommutativ-Gesetz

Assoziativ-Gesetz

Distributiv-Gesetz

Regeln von de Morgan

$A \cap B \Leftrightarrow B \cap A$

$A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cap (A \cap C)$

$\neg(A \cap B) \Leftrightarrow \neg A \cup \neg B$

alle Elemente in A in B sind

$A \cup B$ - Vereinigung

$A \cap B$ - Durchschnitt

$A \setminus B$ - Differenz

$\overline{A}$ Komplement

Alle $\{A \setminus B \cup B \setminus A\}$

Elemente die in A in B

gleich sind

$\{A \setminus B\} \cap \{B \setminus A\} = \emptyset$

$\cap$ Differenz

$\cup$ Vereinigung

$\cap$ Durchschnitt

Bew. durch vollständige Ind. P-Q Formel

Reflexiv

Sym

identifiz

transitiv

Die Produktmenge zweier Mengen A und B besteht aus allen Paaren (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$

$x R y \Leftrightarrow y R x$

$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$

$-\frac{P}{2} \pm \sqrt{\frac{P^2}{4} - Q}$

reflexiv

$x R y \rightarrow y R x$

$x R y \wedge y R x \rightarrow x = y$

$x R y \wedge y R z \rightarrow x R z$

I Ind-Anfang, z.z. $A(n)$ sei wahr (sei $n \in \mathbb{N}$)

$A(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (2k-1) = 1^2$

$1 = 1 (w)$

II Induktionsschritt

z.z. $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (A(n) \Rightarrow A(n+1))$, sei $n \in \mathbb{N}$ fest

a) Voraussetzung, $A(n)$ (w)
d.h. $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ (w)

b) Ind-Behauptung, $A(n+1)$ (w)
d.h. $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$ (w)

c) Beweis
 $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) + (2(n+1)-1)$
 $= n^2 + (2n+1-1)$
 $= n^2 + 2n$
 $= (n+1)^2$

Es gibt keine rationale Zahl

$\frac{p}{q}$ mit $(\frac{p}{q})^2 = 2$

Ind. Bew: 1. Annahme: Es gebe eine Zahl deren Quadrat zwei ist.

$(\frac{p}{q})^2 = 2$, p, q sollen teilerfremd sein, $p^2 = 2q^2$ d.h. p^2 gerade also auch p gerade

$p = 2m$

$4m^2 = 2q^2$

$2m^2 = q^2$

d.h. q^2 ist gerade damit q gerade
 $q = 2m$

$\frac{p}{q} = \frac{2m}{2m}$
also doch nicht gekürzt.

injektiv, bei B kommt nicht mehr als ein Pfeil an

surjektiv: bei mind. jedem Punkt von B kommt ein Pfeil an

Biektiv = Surjektion

Injektiv

Aufzinsen

$K_0 \cdot q^n = K_n$

Abzinsen

$K_n \cdot \frac{1}{q^n} = K_0$

Effektiver Verzinsung

aus $K_0 \cdot q = K_1$ wird

$K_0 \cdot 1,0154 = K_1$

bzw. $K_0 \cdot 1,09 = K_1$

wird $K_0 \cdot 1,101 = K_1$

bei 1/2 Jahres verz.

Stetige Verzinsung

$K_n = K_0 \cdot e^{in}$

Ewige Rente

$R_0 = r \cdot \frac{1}{i}$

Rentenendwert nachsch.

$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot S_n$

Rentenbarwert nach

$R_0 = r \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot a_n$

Rentenendwert vorschüssig

$R'_n = r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r' \cdot S'_n$

Rentenbarwert vorschüssig

$R'_0 = r' \cdot \frac{1}{q^n} \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r' \cdot a'_n$

unendlich geom. Reihe

$\frac{a_1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} a_1 \cdot q^k$

unabhängig // Inverse existiert // Rang

ist vollständig

Ableitung der Funktion

$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Matrizen

Inverse: Spalten und Zeilenvektoren

unabhängig // Inverse existiert // Rang

ist vollständig

Ableitung der Funktion

$y = mx + b$

$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{m(x+\Delta x) + b - mx - b}{\Delta x} = m$

$= m$

$= m$

$= m$

$= m$

(1) reflexiv wenn für alle $a \in A$: $(a,a) \in R$
(2) symm. wenn für alle $a,b \in A$: $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$
(3) transitiv wenn für alle $a,b,c \in A$: $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$
(4) ident. wenn für alle $a \in A$: $(a,a) \in R$

Kann Behauptung ausrechnen und vergleichen!

vorschüssige Rentenrechnung gen. ab dann, wenn

Bewertungstichtag = 1. Zahlung der Zahlungsreihe

nachschüssiger Rentenbarwertfaktor wenn

Bewertungstichtag 1 Jahr vor dem Tag der 1. Zahlung

Cramersche Regel

$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$

$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$

$3x_2 + 4x_3 = -1$

$x_1 = -60$

$x_2 = \frac{30}{-2} = -15$

$x_3 = \frac{-15}{-30} = \frac{1}{2}$

$x_1 = -60$

$x_2 = \frac{30}{-2} = -15$

$x_3 = \frac{-15}{-30} = \frac{1}{2}$

$x_1 = -60$

$x_2 = \frac{30}{-2} = -15$

$x_3 = \frac{-15}{-30} = \frac{1}{2}$

$x_1 = -60$

$x_2 = \frac{30}{-2} = -15$

$x_3 = \frac{-15}{-30} = \frac{1}{2}$

$x_1 = -60$

Differenzialquotient / Geradensteigung

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

unabhängig // Inverse existiert // Rang

ist vollständig

Ableitung der Funktion

$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$= m$

$= m$

Verknüpfungen

$$\det(A+B) = \det A + 4^3 \det B$$

$$\det(A+4B) \neq \det A + 4^3 \det B$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$x * y := x + y - x^2 y$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1, \det B = 6$$

$$\det(A+B) = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 585 \neq \det A + 4^3 \det B = 388$$

Untersuchung auf neutrale Elemente

$$a * n = a, n * a = a$$

$$n = n \cdot a^2 \mid n \neq 0$$

$$a^2 = 1$$

$$a * a = a + a - a \cdot a^2 = a$$

$$a * a = a + a - a \cdot 0^2 = a$$

Matrizen regulär:

Eine Matrix ist genau dann regulär, wenn A^{-1} existiert.

A^{-1} existiert aber nur dann, wenn der Rang der Matrix gleich der Anzahl der Zeilen und gleich der Anzahl der Spalten ist.

Die Matrix solange nach Gauss auflösen bis sich ein Wert ergibt bei dem eine Zeile wegfällt, dann diesen Wert als Schlussak schreiben (die Matrix ist für diesen Wert nicht regulär).

Kleinsten

$$\frac{(5)}{(n-5)} = 1$$

Verknüpfungen

$$x * y := x + y - x^2 y$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1, \det B = 6$$

$$\det(A+B) = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 585 \neq \det A + 4^3 \det B = 388$$

Für $a = -2/5$ oder $a = 2/5$ ist der Rang $A = 3$ und damit A ist regulär für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2/5, 2/5\}$.

Lagrange
 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $g(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{81} + \frac{x_2^2}{36} - 1 = 0$
 $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + 2 \left(\frac{x_1^2}{81} + \frac{x_2^2}{36} - 1 \right)$
 Not. Bed.:
 $L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 + \frac{2 \cdot 2 x_1}{81} = 0$
 $L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_2 + \frac{2 \cdot 2 x_2}{36} = 0$
 $L_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{x_1^2}{81} + \frac{x_2^2}{36} - 1 = 0$
 $2x_1 \left(1 + \frac{2}{81} \right) = 0$

Verknüpfungen
 Wenn f und g kommutativ // Satz 2
 dann $f \circ g$ ist kommutativ // Satz 2
 $x \cdot y = x + 3xy + y$
 $3 \cdot 4 = 3 + 3 \cdot$
 Kommutativ
 Reihenfolge
 zur Verknüpfung

Matrix

H -Matrix

Wiederholung

$x_1 = 0$

$x_2 = 56$

$x_2 = 6$

$x_2 = 6$

$x_1 = -36$

$x_2 = 36$

$P_1 = (0, 6)$ mit $z = -36$

$P_2 = (0, -6)$

Matrix

$z = 81$

$x_2 = 0$

$z = 81$

$x_1 = 81$

$x_1 = 9$

$x_2 = -9$

$P_3 = (3, 0)$

$P_4 = (-9, 0)$

$z = 81$

$z_1 z_m \mid z_1 x_n \mid z_1 x_n$

$z_2 z_m \mid z_2 x_1 \mid z_2 x_n$

$z_3 z_m \mid z_3 x_1 \mid z_3 x_n$

$z_4 z_m \mid z_4 x_1 \mid z_4 x_n$

$z_5 z_m \mid z_5 x_1 \mid z_5 x_n$

$z_6 z_m \mid z_6 x_1 \mid z_6 x_n$

$z_7 z_m \mid z_7 x_1 \mid z_7 x_n$

$z_8 z_m \mid z_8 x_1 \mid z_8 x_n$

$z_9 z_m \mid z_9 x_1 \mid z_9 x_n$

$z_{10} z_m \mid z_{10} x_1 \mid z_{10} x_n$

$z_{11} z_m \mid z_{11} x_1 \mid z_{11} x_n$

$z_{12} z_m \mid z_{12} x_1 \mid z_{12} x_n$

$z_{13} z_m \mid z_{13} x_1 \mid z_{13} x_n$

$z_{14} z_m \mid z_{14} x_1 \mid z_{14} x_n$

$z_{15} z_m \mid z_{15} x_1 \mid z_{15} x_n$

$z_{16} z_m \mid z_{16} x_1 \mid z_{16} x_n$

$z_{17} z_m \mid z_{17} x_1 \mid z_{17} x_n$

$z_{18} z_m \mid z_{18} x_1 \mid z_{18} x_n$

$z_{19} z_m \mid z_{19} x_1 \mid z_{19} x_n$

$z_{20} z_m \mid z_{20} x_1 \mid z_{20} x_n$

$z_{21} z_m \mid z_{21} x_1 \mid z_{21} x_n$

$z_{22} z_m \mid z_{22} x_1 \mid z_{22} x_n$

$z_{23} z_m \mid z_{23} x_1 \mid z_{23} x_n$

$z_{24} z_m \mid z_{24} x_1 \mid z_{24} x_n$

$z_{25} z_m \mid z_{25} x_1 \mid z_{25} x_n$

$z_{26} z_m \mid z_{26} x_1 \mid z_{26} x_n$

$z_{27} z_m \mid z_{27} x_1 \mid z_{27} x_n$

$z_{28} z_m \mid z_{28} x_1 \mid z_{28} x_n$

$z_{29} z_m \mid z_{29} x_1 \mid z_{29} x_n$

$z_{30} z_m \mid z_{30} x_1 \mid z_{30} x_n$

$z_{31} z_m \mid z_{31} x_1 \mid z_{31} x_n$

$z_{32} z_m \mid z_{32} x_1 \mid z_{32} x_n$

$z_{33} z_m \mid z_{33} x_1 \mid z_{33} x_n$

$z_{34} z_m \mid z_{34} x_1 \mid z_{34} x_n$

$z_{35} z_m \mid z_{35} x_1 \mid z_{35} x_n$

$z_{36} z_m \mid z_{36} x_1 \mid z_{36} x_n$

$z_{37} z_m \mid z_{37} x_1 \mid z_{37} x_n$

$z_{38} z_m \mid z_{38} x_1 \mid z_{38} x_n$

$z_{39} z_m \mid z_{39} x_1 \mid z_{39} x_n$

$z_{40} z_m \mid z_{40} x_1 \mid z_{40} x_n$

$z_{41} z_m \mid z_{41} x_1 \mid z_{41} x_n$

$z_{42} z_m \mid z_{42} x_1 \mid z_{42} x_n$

$z_{43} z_m \mid z_{43} x_1 \mid z_{43} x_n$

$z_{44} z_m \mid z_{44} x_1 \mid z_{44} x_n$

$z_{45} z_m \mid z_{45} x_1 \mid z_{45} x_n$

$z_{46} z_m \mid z_{46} x_1 \mid z_{46} x_n$

$z_{47} z_m \mid z_{47} x_1 \mid z_{47} x_n$

$z_{48} z_m \mid z_{48} x_1 \mid z_{48} x_n$

$z_{49} z_m \mid z_{49} x_1 \mid z_{49} x_n$

$z_{50} z_m \mid z_{50} x_1 \mid z_{50} x_n$

$z_{51} z_m \mid z_{51} x_1 \mid z_{51} x_n$

$z_{52} z_m \mid z_{52} x_1 \mid z_{52} x_n$

$z_{53} z_m \mid z_{53} x_1 \mid z_{53} x_n$

$z_{54} z_m \mid z_{54} x_1 \mid z_{54} x_n$

$z_{55} z_m \mid z_{55} x_1 \mid z_{55} x_n$

$z_{56} z_m \mid z_{56} x_1 \mid z_{56} x_n$

$z_{57} z_m \mid z_{57} x_1 \mid z_{57} x_n$

$z_{58} z_m \mid z_{58} x_1 \mid z_{58} x_n$

$z_{59} z_m \mid z_{59} x_1 \mid z_{59} x_n$

$z_{60} z_m \mid z_{60} x_1 \mid z_{60} x_n$

$z_{61} z_m \mid z_{61} x_1 \mid z_{61} x_n$

$z_{62} z_m \mid z_{62} x_1 \mid z_{62} x_n$

$z_{63} z_m \mid z_{63} x_1 \mid z_{63} x_n$

$z_{64} z_m \mid z_{64} x_1 \mid z_{64} x_n$

$z_{65} z_m \mid z_{65} x_1 \mid z_{65} x_n$

$z_{66} z_m \mid z_{66} x_1 \mid z_{66} x_n$

$z_{67} z_m \mid z_{67} x_1 \mid z_{67} x_n$

$z_{68} z_m \mid z_{68} x_1 \mid z_{68} x_n$

$z_{69} z_m \mid z_{69} x_1 \mid z_{69} x_n$

$z_{70} z_m \mid z_{70} x_1 \mid z_{70} x_n$

$z_{71} z_m \mid z_{71} x_1 \mid z_{71} x_n$

$z_{72} z_m \mid z_{72} x_1 \mid z_{72} x_n$

$z_{73} z_m \mid z_{73} x_1 \mid z_{73} x_n$

$z_{74} z_m \mid z_{74} x_1 \mid z_{74} x_n$

$z_{75} z_m \mid z_{75} x_1 \mid z_{75} x_n$

$z_{76} z_m \mid z_{76} x_1 \mid z_{76} x_n$

$z_{77} z_m \mid z_{77} x_1 \mid z_{77} x_n$

$z_{78} z_m \mid z_{78} x_1 \mid z_{78} x_n$

$z_{79} z_m \mid z_{79} x_1 \mid z_{79} x_n$

$z_{80} z_m \mid z_{80} x_1 \mid z_{80} x_n$

$z_{81} z_m \mid z_{81} x_1 \mid z_{81} x_n$

$z_{82} z_m \mid z_{82} x_1 \mid z_{82} x_n$

$z_{83} z_m \mid z_{83} x_1 \mid z_{83} x_n$

$z_{84} z_m \mid z_{84} x_1 \mid z_{84} x_n$

$z_{85} z_m \mid z_{85} x_1 \mid z_{85} x_n$

$z_{86} z_m \mid z_{86} x_1 \mid z_{86} x_n$

$z_{87} z_m \mid z_{87} x_1 \mid z_{87} x_n$

$z_{88} z_m \mid z_{88} x_1 \mid z_{88} x_n$

$z_{89} z_m \mid z_{89} x_1 \mid z_{89} x_n$

$z_{90} z_m \mid z_{90} x_1 \mid z_{90} x_n$

$z_{91} z_m \mid z_{91} x_1 \mid z_{91} x_n$

$z_{92} z_m \mid z_{92} x_1 \mid z_{92} x_n$

$z_{93} z_m \mid z_{93} x_1 \mid z_{93} x_n$

$z_{94} z_m \mid z_{94} x_1 \mid z_{94} x_n$

$z_{95} z_m \mid z_{95} x_1 \mid z_{95} x_n$

$z_{96} z_m \mid z_{96} x_1 \mid z_{96} x_n$

$z_{97} z_m \mid z_{97} x_1 \mid z_{97} x_n$

$z_{98} z_m \mid z_{98} x_1 \mid z_{98} x_n$

$z_{99} z_m \mid z_{99} x_1 \mid z_{99} x_n$

$z_{100} z_m \mid z_{100} x_1 \mid z_{100} x_n$

$a \oplus b = 4 + 3 = 7$

$a \oplus b = 4 + 3 = 7$

$a \oplus b = 4 + 3 = 7$

$a \oplus b = 4 + 3 = 7$

$a \oplus b =$

$a \cdot b = 2a + ab$
 $a \oplus b = x$
 $2 \cdot x = 4 + 2x$
 bei $(2 \cdot a) \cdot a$ zuerst die Klammer ausrechnen und dann diesen Wert für a einsetzen das x für b setzen
 $2(4 + 2x) + (4 + 2x)x = 8 + 4x + 4x + 2x^2 = 2x^2 + 8x + 8$
 um a bestimmen die Lösungsmenge $x \cdot x = 9$
 zuerst $x \cdot x$ ausrechnen $2x + x \cdot y$
 $a \oplus a = x$ und $y = x$
 $2x + x^2$ Dieses Ergebnis dann in die Umformung einsetzen
 $2x + x^2 = 9$
 $x^2 + 2x - 9 = 0$
 $x = -1 \pm \sqrt{10}$
 $x = -1 + \sqrt{10}$

Für welchen Wert von a ist der Vektor $\vec{z}$ eine Linearkombination der Vektoren x, y

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -25 & a \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 3a+8+0-2+30+0 \end{pmatrix} = -3a+36 \Rightarrow a=12$
 Linear abhängig für $a=12$, Linear unabhängig für $a \neq 12$ // Für $a=12$ ist der Vektor $\vec{z}$ Linearkombination der Vektoren x, y !

Untersuchen Sie das System der folgenden Vektoren auf lineare Abhängigkeit:

$a = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ Vektoren in eine Matrix zusammen-

fassen und über Gauss den Rang prüfen. Ist der Rang kleiner als 4 besteht lineare Abhängigkeit.

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1, R_3-2R_1, R_4-R_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist 4 $\Rightarrow$ die Vektoren a, b, c, d sind linear unabhängig

Bestimme die relativen und absoluten Extrema der Funktion

$$f(x) = \frac{x-2}{x-1} \text{ über } I = [3, 4] \quad \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, f''(x) = x^2 - 3x + 2$$

Bedingung für relative Extrema: $f'(x) = 0$
 Diese Bedingung kann nicht erfüllt werden da 1 im Zähler nie null werden kann. $\Rightarrow$ Es gibt also keine relativen Extrema für $f(x)$ über $I = [3, 4]$ // Prüfung der absoluten Extrema $\rightarrow$

Berechnung der Funktionswerte an den Rändern $f(3) = \ln \left(\frac{3-2}{3-1} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\ln 2$
 $f(4) = \ln \left(\frac{4-2}{4-1} \right) = \ln \left(\frac{2}{3} \right) = \ln 2 - \ln 3$

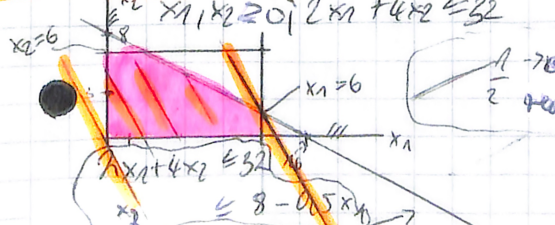
Da die lim. Funktion streng steigend ist gilt:
 $\ln \left(\frac{2}{3} \right) > \ln \left(\frac{1}{2} \right) \Rightarrow$ hat am Punkt 3- $\ln 2$

ein abs. Min und am 4 $\ln \frac{2}{3}$ abs. Max

Für die Aussagen $7B \Rightarrow (A \wedge 7C)$ und $B \vee (7(A \Rightarrow C))$ auf Äquivalenz

A	B	C	$7C$	$7B$	$(A \wedge 7C)$	$7B \Rightarrow (A \wedge 7C)$
W	W	W	F	F	F	W
W	W	F	W	F	W	W
W	F	W	F	W	F	F
W	F	F	W	W	W	W
F	W	W	F	F	F	W
F	W	F	W	F	F	W
F	F	W	F	W	F	F
F	F	F	W	W	F	F

Lineare Optimierung: $x_1 \leq 10, x_2 \leq 6$
 $x_1, x_2 \geq 0, 2x_1 + 4x_2 \leq 32$



$$z = 30x_1 + 20x_2$$

$$20x_2 = z - 30x_1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 0,05z$$

totales Differential

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$f(x,y) = 2x^3 + 4xy^2$ mit $y = y(x) = 3x$
 dann lautet die totale Ableitung:

$$6x^2 + 4y^2 + 8xy \cdot 3 = 114x - 48x + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3n^5 - 21}{\sqrt[12]{n^{28} + 7n^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3n^5 - 21}{\sqrt[12]{n^{28} + 7n^5}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 \left(\frac{1}{n^5} \right) - 0}{\left(\frac{1}{n^5} \right) + 7} = -\frac{3}{7}$$

Gegeben sei eine arithmetische Folge a_n mit $a_{10} = 1$ und $\sum_{k=1}^{12} a_k = -9$. Man bestimme a_9 .

$$a_{10} = a \cdot a_9 = (n-1)d + a_1$$

$$S_n = \frac{1}{2}n \cdot (a_1 + a_n)$$

$$S_{12} = 6(a_1 + 11d + a_1) = -9$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = 1$$

$$6(1 - 9d + 11d + 1 - 9d) = -9, 6(2 - 7d) = -9$$

$$12 - 42d = -9; d = \frac{1}{2}$$

Matrizenmultiplikation (Spaltenzahl der ersten Matrix muss gleich Zeilenzahl der zweiten Matrix sein)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -7 \\ -3 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix}, 77 \cdot E_{(3,3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -7 \\ -3 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 & 0 & 0 \\ 0 & 77 & 0 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 6 & -7 & 9 \\ -3 & 10 & -9 & 11 \\ -13 & 14 & -11 & 20 \end{pmatrix}$$

Linearkombination von Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{Skalar } k=2, r=0,5$$

Dann gilt der Vektor $\vec{x}$ mit

$$\vec{x} = k \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ als Linearkombination der Vektoren } \vec{a} \text{ und } \vec{b}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (2, 1, 3)$; $\vec{b} = (-4, 3, 1)$; $\vec{c} = (2, 6, 8)$ Man untersuche ob der Vektor $\vec{x} = (6, 8, -14)$ als

Linearkombination darstellbar ist

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix}$$

in Matrixform und über Gauss Algorithmus ausrechnen

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & -14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 8 & -14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & 5 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -10 & -26 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} z=0 \\ y=1 \\ x=2=3 \\ x=5 \end{matrix}$$

$$5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Linearkombination in $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 1 & 6 & 45 \\ -3 & -8 & -54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 45 \\ 2 & 2 & 10 \\ -3 & -8 & -54 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 45 \\ 0 & 10 & 80 \\ 0 & 10 & 99 \end{pmatrix}$$

$y=8, x=-3 \rightarrow$ Einsetzen in 3. Gleichung ergibt $80 \neq 81$ also gibt es keine Linearkombination der Vektoren

Gesucht ist ein gerader Kreis zylinder mit möglichst kleiner Oberfläche O bei gegebenem Volumen

$$V = \pi r^2 h \quad \text{nach } h \text{ auflösen}$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$O(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

$$f'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

$$f''(r) = 4\pi + \frac{2V}{r^3}$$

$$f'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$$

$$4\pi r^3 = \frac{2V}{r^2} \Rightarrow r^5 = \frac{V}{2\pi}$$

$$r = \sqrt[5]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$f''(r) = 4\pi + \frac{2V}{r^3} > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

Ungleichungen

$$\frac{x+5}{x-3} < 2; x+3 \mid \cdot (x-3)$$

$$\begin{cases} x+5 < 2(x-3) & \text{für } x > 3 \\ x+5 > 2(x-3) & \text{für } x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5 < 2x-6 & \text{für } x > 3 \\ x+5 > 2x-6 & \text{für } x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x < -11 & \text{für } x > 3 \\ -x > -11 & \text{für } x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -11 & \text{für } x > 3 \\ x > -11 & \text{für } x < 3 \end{cases}$$

Grenzwertbestimmung

$$x_n = \frac{1+7n^3-2n^5}{2n^2-n^3+4n^4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+7n^3-2n^5}{2n^2-n^3+4n^4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{x}\right)^x = e^p = \frac{1}{e^{-p}}$$

$$BSP: x_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

$$x_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}$$

$$BSP: x_n = \sqrt[n]{n^2+2n}; \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2+2n} = 1$$

Extrema: $e^{(3x^3-8x)}$

$$f'(x) = e^{(3x^3-8x)} \cdot (9x^2-8)$$

$$f''(x) = \dots; f'(x) = 0 \text{ da } e^{(3x^3-8x)} > 0$$

nicht null sein kann muss man $9x^2-8$ nehmen, somit $x = \pm \sqrt{\frac{8}{9}}$

Inverse Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jede Zahl hoch 0 ist 1

$$\text{auch } (n^2+2n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2+2n)^{\frac{1}{n}} = 1$$