① $R \subseteq M \times N$

r ⊆ r, s, t ⊆

rechtseind.

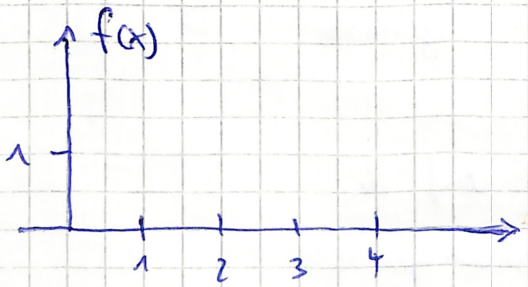
auf, surjektiv

injektiv → eindeutig

umkehrbar eindeutig

Eine Funktion besteht aus 3 Mengen

BSP 1 $x \to 2$ Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ (auf $\{2\}$)



die Eindeutige Zuordnung

BSP 2

2 $f(x) = n$ → Keine Funktion

erst wenn

$f(x) = n$, falls $3n-2 \leq x \leq 3n$

Bsp $f(2)$

für n 1 einsetzen

$f(x) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 1$

$1 \leq x \leq 3$

alle Werte zw. 1 u. 3

f

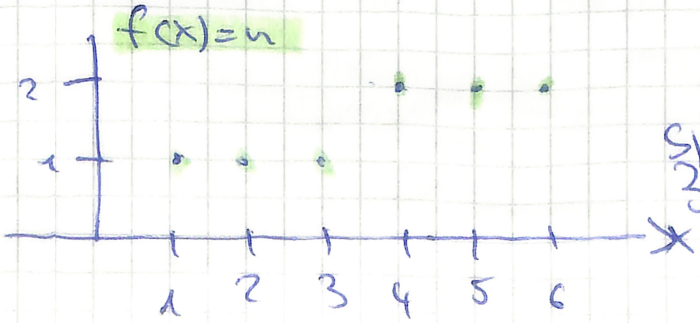


Abb von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$

ist diese Abb.: Injektiv → nein!

wenn man Funktion = 2 hat muß man nicht alle i, j gemeinsam

BSP 3 $f(x) = x^2$

→ Abb. von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$

Keine Abb. auf → nicht surjektiv

BSP 4 $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \text{ ungerade ist} \\ x & \text{-"- gerade} \end{cases}$

Abb von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$

BSP 5 $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls x ungerade} \\ x-1 & \text{falls x gerade} \end{cases}$

eindeutig "auf"

f → Vorschrift

$f(x)$ → Funktionsterm (es gibt nichts zu lösen, nur Einsetzen)

$f(a)$ → Funktionswert an der Stelle a

$y = f(x)$ → Funktionsgleichung

Eckehard Krah

Def 13.21

Es sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich $D(f)$ und dem Bildbereich $B(f)$

Ist $\{(y,x) \mid (x,y) \in f\}$ eine Funktion, so heißt diese die Umkehrfunktion von f (f^{-1})

nur Umkehrfunktion

→ nicht $\frac{1}{f}$

Bildbereich

$D(f^{-1}) = B(f)$ $\quad B(f^{-1}) = D(f)$

$\bigwedge_{x \in D(f)} f^{-1}(f(x)) = x \quad \bigwedge_{x \in B(f)} f(f^{-1}(y)) = y$

Satz 1.3.22: Falls die Funktion f eine umkehrbar eindeutige Abb ~~von Definitionsbereich~~ (von $D(f)$ auf N) ist, besitzt f eine Umkehrfunktion f^{-1}. Diese ist auch eine umkehrbar eindeutige Abb (von N auf $D(f)$) und es gilt: $(f^{-1})^{-1} = f$

Bemerkung:

Der Graph von f^{-1} entsteht aus dem graphen von f durch Spiegelung an der ersten winkelhalbierenden.

2. Zahlbereiche

2.1 Die natürlichen Zahlen

$1, \quad 2 := 1+1 \quad 3 := 2+1, \ldots \quad \mathbb{N} = \{1,2,3\ldots\}$

es gilt das Kommutativ und assoziativgesetz und Distributivgesetz,

$3 + 4 = 4 + 3$

K, A, D

Def 2.1.1 : Es sei M eine nicht leere Menge. Ist jeweils zwei Elementen $a, b \in M$ eindeutig ein Element $a * b \in M$ zugeordnet, so heißt $*$ (innere) Verknüpfung auf M. Das Paar $(M, *)$ heißt Verknüpfungsgebilde

Verknüpfungsgebilde $\hat{=}$ Paar

$* : M \times M \to M$

Bsp: $M = \mathbb{N}$

1 $a * b = 4a + 2b + 1$

$5 * 1 = 23$

$1 * 5 = 15$

Kommutativgesetz gilt nicht

$51 = 3 * 19 = (3 * 3) = 19 * 3 = 83$ kommutativ

$3 * (3 * 3) =$

2 $a * b = \frac{3}{2} a + b$

$10 * 2 = 17$

$\Rightarrow$ Keine Verknüpfung

3 $a * b = 11a$ ⇒ Verknüpfung

Def 2.1.3: Eine VG $(M, *)$ heißt assoziativ auf M genau dann, wenn gilt:

$a, b, c \in M$: $a * (b * c) \quad (a * b) * c$

Ein assoziatives Verknüpfungsgebilde heißt Halbgruppe

BSP: $(\mathbb{N}, +)$ → assoziativgesetz gilt (Halbgruppe
$(\mathbb{N}, \cdot)$ — " —
$(\mathbb{N}; a * b = 100 \cdot 1)$ → Bsp Halbgruppe

$a * b := 2a + b$ Keine Halbgruppe

Beweis durch Einsetzen ~~der~~ von Zahlen in a und b z.B. $1 * 1 \quad 1 * 1 := 2 \cdot 1 + 1$
Keine Halbgruppe

$7 + x = 5$ → Keine Gleichung
→ Aussageform (nicht erfüllbar)

$8x = 1$ nicht erfüllbar in $\mathbb{N}$

$n \in \mathbb{N}$: $n \cdot 1 = n$ → 1 ist neutral; nicht k

$x + u = x$ → nicht erfüllbar in $\mathbb{N}$

2.2 Die ganzen Zahlen

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

$x + n = x$ erfüllbar mit 0

Def 2.2.1: Ist $(M, *)$ ein VG, so heißt $n \in M$ genau dann neutrales Element der VG, wenn gilt:

$\bigwedge_{a \in M}$ $a * n = n * a = a$ → neutrales Element des Verknüpfungsgebildes

BSP.: $(\mathbb{N}, \cdot)$ $(\mathbb{N}_0, +)$ → Bsp. für neutr. Verknüpfungselement

Satz 2.2.2. Ein VG besitzt höchstens ein neutrales Element

Beweis: Seien n_1 und n_2 neutrale Elemente:

$$n_1 = n_2 * n_1 = n_2$$

wenn es zwei neutrale Elemente gibt, sind sie gleich

Def 2.2.3 Ist $(M, *)$ ein VG mit neutralem Element n, so heißt $a^{-1} \in M$ genau dann inverses Element zu $a \in M$ wenn gilt: $a * a^{-1} = a^{-1} * a = n$.

$$\mathbb{Z} := \{ z \mid z \in \mathbb{N} \vee -z \in \mathbb{N} \vee z = 0 \}$$

Kommutativ-Gesetz
Assoziativ -"-
distributiv -"-
gelten!

Def 2.2.4: Eine Halbgruppe (HG) $(G, *)$ mit neutralem Element n heißt genau dann Gruppe, wenn zu jedem Element $a \in G$ ein inverses Element $a^{-1} \in G$ existiert.

BSP: $(\mathbb{Z}, +)$ $\quad (\{x \mid x = 2z \wedge z \in \mathbb{Z}\}, +)$ (und)

$(\mathbb{N}, \cdot)$ $\quad ax = b$ nicht immer lösbar

$(\mathbb{Z}, \cdot)$

2.3 Die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \ (1) \ q \in \mathbb{N} \right\} \quad (1) = \text{und}$$

P K A D - Gesetze

$(\mathbb{Q}, +)$, $\quad (\mathbb{Q}, +)$ HG mit neutralem Element

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ G

Satz 2.3.1: Die rationalen Zahlen liegen dicht

$$\bigwedge_{a,b \in \mathbb{Q}} \bigvee_{c \in \mathbb{Q}} [a < b \Rightarrow a < c < b]$$

Zwischen zwei rat. Zahlen lässt sich stets eine weitere einfügen → arithmetisches Mittel

$\frac{3}{4} < \frac{18}{11} < \frac{15}{7}$ $\quad \frac{(3+15)}{(4+7)}$

Es gibt keinen Nachfolger von null

---

echte Quadratzahlen ⊂ echte Teilmenge

$\{1, 4, 9, 16 \ldots\} \subset \{1, 2, 3, \ldots\}$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$
$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$
$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2$

jeder Quadratzahl ist eine

Bijektive Abbildung! — Keine echte Teilmenge, da unendlich

Satz 2: Die rationalen Zahlen sind abzählbar, d.h. es gibt eine umkehrbar eindeutige (bijektive) Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}$

es gilt auch:

natürl. Zahlen
↕
rationale Zahlen

Beweis: für positive rationale Zahlen:
(1 Cantorsches Rationalverfahren)

$\frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{4}{1} \quad \ldots \quad \frac{n}{1}$

$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{2} \quad \ldots \quad \frac{n}{2}$

$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \ldots \quad \frac{n}{3}$

$r_1 = 1, \; r_2 = 2$ $\quad \frac{2}{2} = 1$ ist schon vorhanden

$r_3 = \frac{1}{2}, \; r_4 = \frac{1}{3}$

$r_5 =$

$\frac{1}{m}$ $\frac{2}{m}$ $\frac{3}{m}$ $\frac{4}{m}$ — $\frac{n}{m}$ ....

⋮

Zweifach unendliches Schema

Enthält alle positiv rationalen Zahlen