

5. Für Mengen A, B, C beweise oder widerlege man die Allgemeingültigkeit von

a. $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$ b. $(B \setminus C) \cap A = B \setminus (C \cap A)$ c. $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$.

$$(A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

6. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $T_n := \left\{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \bigvee_{m \in \mathbb{N}} m \cdot x = n \right\}$. Man bilde $T_3 \cap T_8$ ✓ $P(T_3 \cap T_8)$,

$$P T_3 \cap P T_8, T_8 \setminus T_3.$$

7. Man bilde $PP\{\emptyset\}$, $P\{\emptyset\} \setminus P\emptyset$ und $P\emptyset \setminus \emptyset$.

8. Man beweise: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{j=2}^{3n} j(j-1) = 9n^3 - n$.

9. Man beweise eines der beiden Distributivgesetze der Aussagenlogik.

10. Gegeben seien die folgenden Relationen:

$$R_1 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge |x - y| \leq 1\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \mid x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \wedge y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \wedge x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x \geq 2 \wedge x = y\}$$

$$R_4 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge \bigvee_{n \in \mathbb{N}} xn = y\}$$

Man fülle in folgender Tabelle aus, ob die Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind:

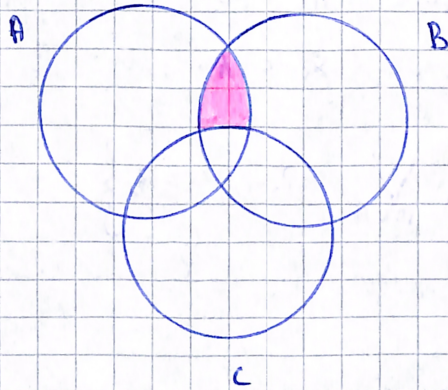
R_i ist	R_1	R_2	R_3	R_4
reflexiv	w	w	f	w
symmetrisch	w	f	w	f
transitiv	f	w	f	w
identitiv	f	f	w	w

Abgabe: bis spätestens Montag, 30.10.00, 14.00 Uhr im Postfach „Höhere Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ im Raum H-C 5326 (AVZ, Ebene 5); nicht Postfach Prof. Dr. Fröhlich!

Bitte vermerken sie neben ihrem Namen auch ihre Gruppenzugehörigkeit bzw. -Nummer!!! Danke!!!

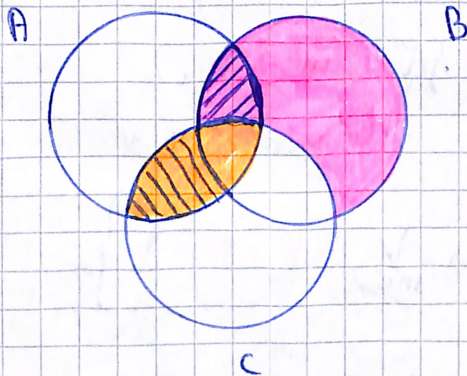
Aufgabe 5

a) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$



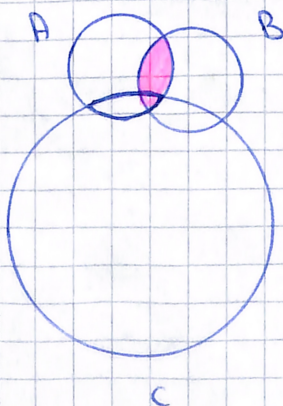
(W)

b) $(B \setminus C) \cap A = B \setminus (C \cap A)$



(F)

c) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$



(F)

Aufgabe 6

$n \in \mathbb{N}$ sei $T_n = \left\{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \bigvee_{m \in \mathbb{N}} m \cdot x = n \right\}$

$$n \in \mathbb{N} \text{ sei } T_3 \cap T_8 \left\{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \bigvee_{m \in \mathbb{N}} m \cdot x = 3 \right\}$$

für $m = 3$
 $x = 1$

$$\left\{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \bigvee_{m \in \mathbb{N}} 3 \cdot 1 = 3 \right\}$$

$$n \in \mathbb{N} \text{ sei } T_3 \cap T_8 \left\{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \bigvee_{m \in \mathbb{N}} m \cdot x = 8 \right\}$$

für $m = 8:2$
 $x = 1, 4$

$$\left\{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \bigvee_{m \in \mathbb{N}} 8 \cdot 1 = 8 \right\}$$

Teiler von 8 1, 2, 4, 8

Teiler von 3 1, 3

Lösungsmenge $=: \{1\}$

Aufgabe 8

Beweis durch vollständige Induktion

$$\sum_{j=2}^{3n} j(j-1) = 9n^3 - n$$

I Induktionsanfang

$A(n)$ sei wahr (sei $n \in \mathbb{N}$ fest)

$$2(2-1) + 3(3-1) = 9 \cdot 1^3 - 1$$

$$2 + 6 = 8$$

$$8 = 8 \quad (w)$$

II Induktionsschritt

z.z. $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (A(n) \Rightarrow A(n+1))$ (sei $n \in \mathbb{N}$ fest)

a) Induktionsvoraussetzung $A(n) \quad (w)$

$$\text{d.h. } \sum_{j=2}^{3n} j(j-1) = 9n^3 - n$$

b) Induktionsbehauptung $A(n+1) \quad (w)$

$$\text{d.h. } \sum_{j=2}^{3n+3} j(j-1) = 9(n+1)^3 - (n+1)$$

c) Beweis

$$\sum_{j=2}^{3n} j(j-1) + \sum_{j=3n+1}^{3n+3} j(j-1) = 9(n+1)^3 - (n+1)$$

$\swarrow$ $A(n)$ $\swarrow$

$$= 9n^3 + 27n^2 + 27n + 9 - n - 1$$

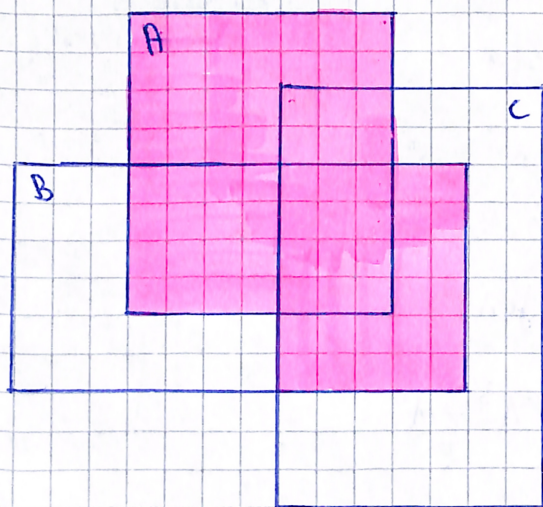
$$= 9n^3 - n + 27n^2 + 27n - 1$$

$\swarrow$ $\swarrow$
siehe Vor.

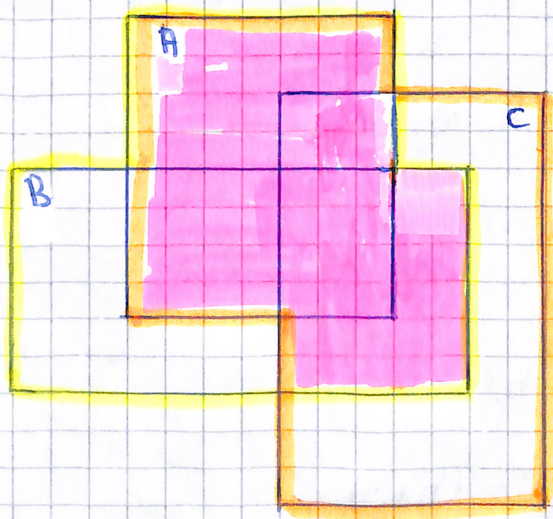
q.e.d.

Aufgabe 9

$$A \cup (B \cap C) =$$



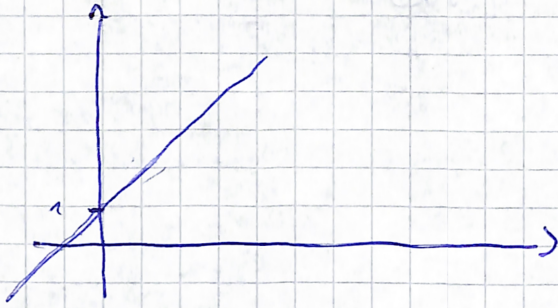
$$(A \cup B) \cap (A \cup C)$$



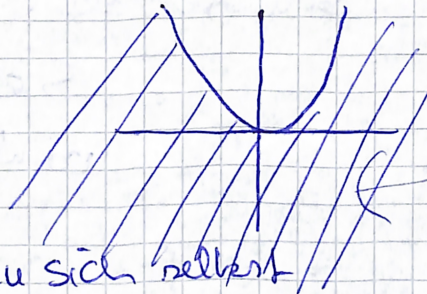
10)

$$x R y \Leftrightarrow x = y - 1$$

$$x + 1 = y$$



$$x R y \Leftrightarrow x^2 > y$$



x steht in der Relation zu sich selbst

$$\downarrow (x, x) \in R$$

$$x \in M$$

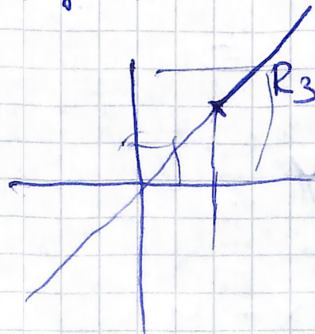


zu R_2 $(3, 8) R_2 (10, 11)$

$R_3 \rightarrow$ nicht reflexiv

minim. 2

$$y = x$$



jede reelle Zahl muss
in der Relation zu sich
selbst stehen und
größer gleich sein
auf ein x gehen um
zu beweisen

- 1 ist nicht erfüllt
für 3 erfüllt

R4)

Mi 11-12¹⁵

Relation auf den natürl. Zahlen

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} x \cdot n = y$$

y lässt sich schreiben als x · natürl. Zahlen

Sei $x \in \mathbb{N}$

Wähle $n = 1$

Symmetrisch

$$R \text{ symmetrisch} \Rightarrow \bigwedge_{x, y \in \mathbb{N}} (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$
$$x R y \Rightarrow y R x$$

Entfernung von x nach y höchstens 1

$$x - y \leq 1 \Rightarrow y - x \leq 1$$

Behaupt. $y - x = x - y$

$$x = 3$$

$$y = 2,5$$

$$x - y = 0,5$$

$$x = 3$$

$$y = 7$$

$$y - x = 4 \leq 1$$

R_2 Koordinatensumme y höchstens so gross wie Koordinatensumme x

$$x = 1, 2,$$

$$y = 1, 3$$

R_2 ist nicht symmetrisch

R_4 ist nicht symmetrisch

4 ist Teiler von 8

8 ist nicht Teiler von 4

transitiv

R ist transitiv $\Rightarrow \bigwedge_{x, y, z \in M} ((x, y) \wedge (y, z)) \Rightarrow (x, z) \in R$

3 Zahlen

Entfernung von x nach y höchstens 1

- u -

y - u - z

- u - 1

Folgerung - u -

x nach z - u - 1

$$x=1, y=2, z=3$$

deshalb ist R_1 nicht transitiv

$R_2 \rightarrow$ ist transitiv

Koordinatensumme + höchstens so gross wie y
- u - y - u - z
Folgendes - u - x - u - z

R_3 ist transitiv

R_4 $(x, y) \in R_4 \quad \bigvee_{n_1} x \cdot u_n = y$

$(y, z) \in R_4 \quad \bigvee_{n_2} y \cdot u_n = z$

$(x, z) \in R_4 \quad z = y \cdot u_2 = x \cdot \underbrace{(u_1 \cdot u_2)}_{\in K}$

identitativ

R_1 ist identitativ wenn gilt $\Leftrightarrow \bigwedge_{x, y \in K} ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y$

wenn x u. y verschieden sind

kann nicht $x R y$ oder $y R x$ sein

$\Rightarrow$ wenn beide gleich sind