

Übungen zur Höheren Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

WS 2000/01

11.

Gegeben seien folgende Funktionen:

$f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } f_1(x) = x + 1$

$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \text{ mit } f_3(x) = 6x^4$

$f_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } f_2(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

$f_4: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \text{ mit } f_4 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 3), (4, 1)\}$

Man fülle in der folgenden Tabelle aus, ob die Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind:

f_i ist	f_1	f_2	f_3	f_4
injektiv	w	w f	w f	f
surjektiv	w	w f	w	w f

12.

Für die umkehrbaren (bijektiven) Funktionen aus Aufgabe 11 gebe man f^{-1} an.

13.

Gegeben seien folgende Verknüpfungen:

$x \oplus y = x + 3xy + y \text{ auf } \mathbb{Z}$

$x \cdot y = \frac{2x + 2y}{3} \text{ auf } \mathbb{Q}$

$x * y = y \cdot x^2 + 1 \text{ auf } \mathbb{N}$

Man kreuze den Wahrheitswert folgender Aussagen an:

	wahr	falsch
$(\mathbb{Z}, \oplus)$ ist kommutativ	☒	
$(\mathbb{Z}, \oplus)$ ist assoziativ	☒	
$(\mathbb{Z}, \oplus)$ besitzt ein neutrales Element	☒	
$\bigwedge_{x \in \mathbb{Z}} \bigvee_{y \in \mathbb{Z}} x \oplus y = y \oplus x = 0$	☐	☒
$(\mathbb{Q}, \cdot)$ ist kommutativ	☒	
$(\mathbb{Q}, \cdot)$ ist assoziativ	☒	☒
$(\mathbb{Q}, \cdot)$ besitzt ein neutrales Element	☒	☐
$\bigvee_{x, y, z \in \mathbb{Q}} (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$		
$(\mathbb{N}, *)$ ist kommutativ	☒	
$(\mathbb{N}, *)$ ist assoziativ		☒
$(\mathbb{N}, *)$ besitzt ein neutrales Element	☒	☐

da 3 keine Elemente?

keine

14. Man beweise die Aussage: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. siehe auch Vorlesung 5/2. Seite15. Man bestimme die Lösungsmenge der für die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ gegebenen Aussageform

$A_{a,b}(x): ax + b = 0 \text{ über } \mathbb{R}$

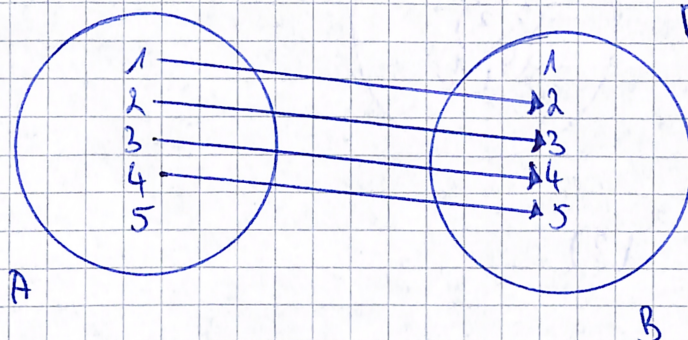
$$\begin{aligned} ax &= -b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Abgabe: bis spätestens Montag, 6.11.00, 14.00 Uhr im Postfach „Höhere Mathematik fürWirtschaftswissenschaftler“ im Raum H-C 5326 (AVZ, Ebene 5); **nicht** Postfach Prof. Dr. Fröhlich!

Bitte vermerken sie neben ihrem Namen auch ihre Gruppenzugehörigkeit bzw. -nummer!!! Danke!!!

1A)

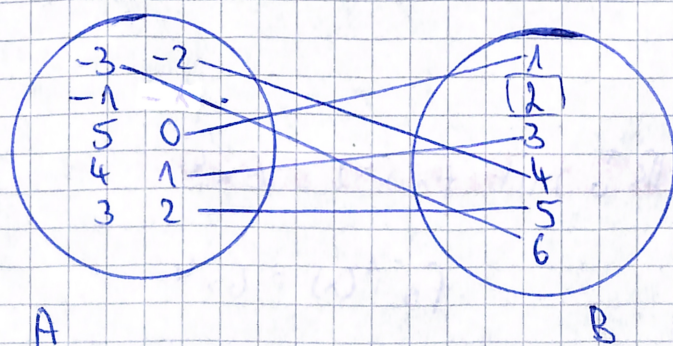
$$f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } f_1(x) = x+1$$



Injektiv $\rightarrow$ Bei B kommt nicht mehr als ein Pfeil an
Surjektiv $\rightarrow$ Bei mind. jedem Punkt von B kommt ein Pfeil an

injektiv

$$f_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } f_2(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x < 0 \\ 2x+1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$



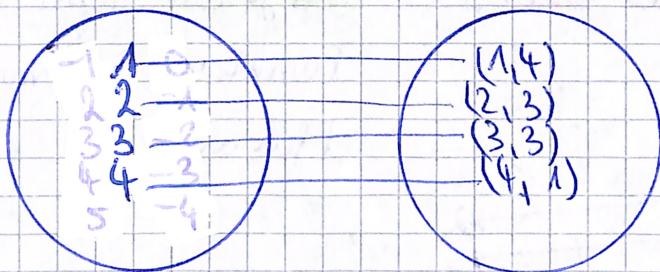
Wegen 2
injektiv

$$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ mit } f_3(x) = 6x^4$$

Surjektiv

nicht injektiv da $6x^4$ immer positiv

f₄) $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ mit $f_4 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 3), (4, 1)\}$



Surjektiv (?)

12)

$f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f_1(x) = x+1$ man gebe f^{-1} an

$$f_1^{-1}(x) = x+1$$

$$f(x+1) = x$$

$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $f_3(x) = 6x^4$

$$f_3^{-1}(x) = 6x^4$$

$$f_3(6x^4) = x$$

$f_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f_2(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x < 0 \\ 2x+1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

$$f_2^{-1}(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x < 0 \\ 2x+1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_2 \left(\begin{cases} 2x & \text{für } x < 0 \\ 2x+1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \right) = x$$

?

14) zu beweisen ist $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{3}$ ist nicht rational (irrational)

Beweis durch Widerspruch:

- Wir nehmen an: $\sqrt{3}$ ist rational

- also ist $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ darstellbar mit $n \neq 0$

$$z^2 = 3 = p^2 / q^2$$

$$3q^2 = p^2$$

$\rightarrow p^2$ ist durch 3 teilbar, deshalb

auch p durch 3 teilbar

$$\rightarrow p = 3n$$

$$3q^2 = 9n^2$$

$$q^2 = 3n^2$$

$\rightarrow q^2$ ist durch 3 teilbar, deshalb

auch q durch 3 teilbar

$$\rightarrow q = 3m$$

$$\frac{p}{q} = \frac{3n}{3m}$$

$\rightarrow p$ u. q sind Teilerfremd

$\rightarrow$ jede rationale Zahl kann

durch $\frac{p}{q}$ dargestellt werden.

Herleitung

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)) \text{ und Bew.}$$

- Von A $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x^2 = 3$
Beh. B $x \notin \mathbb{Q}$

Beweis (ind) Sei $x \in \mathbb{R}^+$ $\wedge$ $x^2 = 3$ $\wedge$ $x \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N} \frac{p}{q} = x \wedge p, q \text{ teilerfremd} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 3$$

$$\Rightarrow p^2 = 3 \cdot q^2$$

$q \in \mathbb{N}$

(Hilfssatz)

$\Rightarrow 3$ ist Teiler von p

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} p = 3m$$

$$\Rightarrow (3m)^2 = 3q^2$$

$9m^2$

$$\Rightarrow q^2 = 3 \frac{m^2}{\cancel{\in \mathbb{N}}}$$

$\Rightarrow q^2$ hat den Teiler 3 ! da das dreifache einer $\mathbb{N}$ $\rightarrow \in \mathbb{N}$
HS

q hat Teiler 3

$\Rightarrow p, q$ nicht teilerfremd
 $\neg C$ W

p^2 ist das dreifache einer $\mathbb{N}$

p^2 hat demnach den Teiler 3 !

- Eine ungerade Zahl quadriert ergibt immer eine ungerade Zahl

Hilfssatz: für alle $\mathbb{N}$ gilt: wenn

n^2 Teiler 3 hat folgt

n hat Teiler 3

- Beweis durch Kontraposition: $((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$

$(\neg A \Rightarrow \neg B))$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und B kein Teiler von A

$$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}_0 n = 3r + 1 \vee n = 3r + 2$$

$$\Rightarrow n^2 = (3r + 1)^2 \vee$$

$$n^2 = (3r + 2)^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 9r^2 + 6r + 1 \vee$$

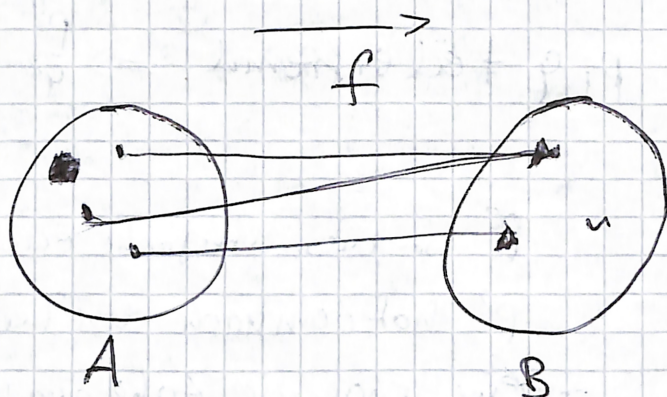
$$n^2 = 9r^2 + 12r + 4$$

$$3(3r^2 + 4r + 1) + 1$$

$$= 3(3r^2 + 2r) + 1 \in \mathbb{N}_0$$

3 ist kein Teiler von n^2

11)



$$f: A \rightarrow B$$

jedem Element von A ist genau ein Element von B zugeordnet

A ist x -Achse zugeordnet
 B ist y ——— u ———

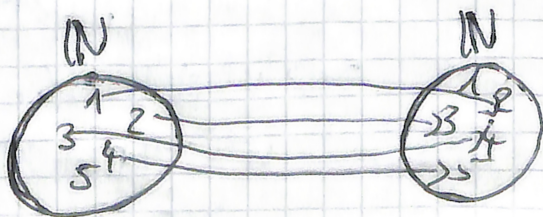
$$\text{injektiv} \iff \bigwedge_{a_1, a_2 \in A} a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

aber bei B kommt nicht mehr als ein Pfeil an

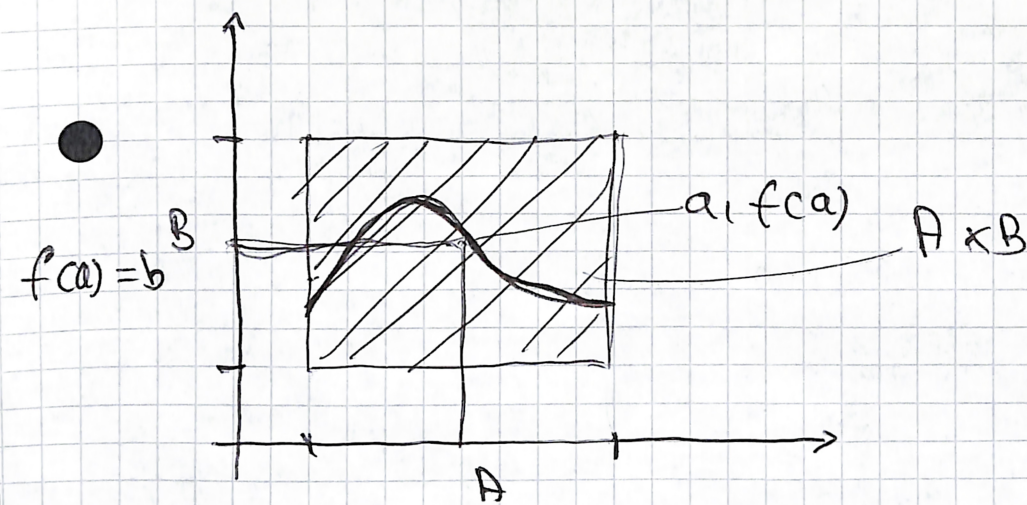
surjektiv: Bei mind. einem jedem Punkt von B kommt mind. ein Pfeil an

$$\bigwedge_{b \in B} \bigvee_{a \in A} f(a) = b$$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } f(x) = x + 1$$



Funktion f
nicht surjektiv sondern
injektiv



Parallele x -Achse hat höchstens einen Punkt mit dem Graph

Funktion ist surjektiv wenn wenn jede Parallelle der x Achse zur y Achse hat mind. den Graphen mind. 1 Punkt ^{Wert aus B} gemeinsam. $\rightarrow$ Surjektiv