

Übungen zur Höheren Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

WS 2000/01

16. Man beweise die Bernoullische Ungleichung:

$$\bigwedge_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \geq -1}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (1+h)^n \geq 1+nh.$$

17. Man bestimme den Koeffizienten der Potenz a^5 in der Entwicklung von $(2-5a)^{13}$.

18. Man zeige: Das geometrische Mittel $\sqrt{a \cdot b}$ zweier beliebiger nicht negativer reeller Zahlen a und b ist höchstens so groß wie ihr arithmetisches Mittel $\frac{1}{2}(a+b)$.

19. Mit $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = 4 - 2i$ bestimme man $|-4z_1 + 3\bar{z}_2|$ sowie Real- und Imaginärteil von $\frac{2z_1 - i}{i \cdot i - z_2}$.

20. Man bestimme die Lösungsmengen der Ungleichungen

a) $\frac{x+3}{x-13} \geq x-6$ b) $|x+1| \leq 100 - 3 \cdot \left|8 - \frac{x}{2}\right|$

21. Man gebe die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an:

a) $u^9 - 14u^5 - 32u = 0$ b) $2 \cdot \sqrt{13-x} - \sqrt{x+4} = 7$

Abgabe: bis spätestens Montag, 13.11.00, 14.00 Uhr im Postfach „Höhere Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ im Raum H-C 5326 (AVZ, Ebene 5); nicht Postfach Prof. Dr. Fröhlich!

Bitte vermerken sie neben ihrem Namen auch ihre Gruppenzugehörigkeit bzw. -nummer!!! Danke!!!!

20b

$$|x+1| \leq 100 - 3 \cdot \left| 8 - \frac{x}{2} \right|$$

NR:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{falls } x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \end{cases}$$

$$\left| 8 - \frac{x}{2} \right| = \begin{cases} 8 - \frac{x}{2} & \text{falls } 8 - \frac{x}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 16 \\ -8 + \frac{x}{2} & \text{falls } 8 - \frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow x > 16 \end{cases}$$

1. Fall $x < -1$

2. Fall $x \in [-1, 16]$

3. Fall $x > 16$

1. Fall 2. Fall 3. Fall

-1 16

1. Fall $x < -1$

$$\Leftrightarrow -x-1 \leq 100 - 3 \left(8 - \frac{x}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow -x-1 \leq 100 - 24 + \frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 76 + \frac{5}{2}x \quad | -76$$

$$-77 \leq \frac{5}{2}x \quad | : \frac{5}{2}$$

$$-\frac{154}{5} \leq x$$

$$L_1 = \left\{ \left[-\frac{154}{5}, -1 \right] \right\}$$

2. Fall

$$x \in [-1, 16]$$

$$x+1 \leq 76 + \frac{3x}{2}$$

$$\frac{x}{2} \geq -75$$

$$x \geq -150$$

$$L = [-1, 16]$$

Wenn man
• (-1) dann verändert
sich das ~~Zeichen~~ $\leq$ Zeichen

3. Fall

$$x > 16$$

$$x+1 \leq 100 - 3 \left(-8 + \frac{x}{2} \right)$$

$$x+1 \leq 100 + 24 - \frac{3}{2}x$$

$$x \leq 123 - \frac{3}{2}x$$

$$\frac{5}{2}x \leq 123 \quad | : \frac{5}{2}$$

$$x \leq \frac{246}{5} = 49 \frac{1}{5}$$

$$L =] 16, 49 \frac{1}{5}]$$

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$$

$$L = \left[-\frac{154}{5}, \frac{246}{5} \right]$$

$$\begin{array}{c} \wedge \\ m \in \mathbb{R} \\ h \geq -1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \wedge \\ n \in \mathbb{N} \end{array} \quad (1+h)^n \geq 1+nh$$

Sei $h \in \mathbb{R}$, $h \geq -1$ z. z. $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(1+h)^n}_{h(n)} \geq 1 + nh$

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} A(n) \Leftrightarrow (A(n) \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} A(n) \Rightarrow A(n-1))$$

3. und 4. Aufg. 2.2. A(1)w

$$A_{(1)}: \quad (1+h)^1 \geq 1+h$$

$$1+h \geq 1+h \quad (w)$$

II Ind. Schritt 2.2 $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Sei $n \in \mathbb{N}$, fest:

a) Ind. Annahme dass $A(n)(w)$ d.h. $(1+h)^n \geq 1+nh$
 b) Ind. Beh. dass $\downarrow_{(h+1)w} \sim n \cdot (1+h)^{1+n} \geq 1+(n+1)h$
 c) Bew: $(1+h)^{k+1} = (1+h) \cdot (1+h)^k \geq (1+nh)(1+h)$

$$= 1 + h + n \cdot h + n \cdot h^2$$

$$\text{Vergleichen mit } \Rightarrow 1 + (n+1)h \geq 1 + (n+1)h + \underbrace{nh^2}_{\geq 0}$$

9201.

17. Man bestimme den Koeffizienten der
Potenz a^5 in der Entwicklung von
 $(2-5a)^{13}$

$$a^5 \quad (2-5a)^{13}$$

bin. Lehrsatz

$$\bigwedge_{a,b \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} 2^{13-k} \cdot (-5a)^k$$

$k=5$ sehen

$$= \cancel{\binom{13}{5}} \binom{13}{5} 2^8 (-5a)^5$$

$$da -1^5 = -1$$

$$= - \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} 2^8 5^5 a^5$$

$$= - 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot \underbrace{2^8 \cdot 5^5}_{2^3 \cdot 2^5 \cdot 5^5} \cdot a^5$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{10^5}$$

$$= - 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot a^5$$

$$= 1029600000 \cdot a^5 \rightarrow \text{Koeffizient ist } -1029600000 \cdot a^5$$

16)

Beweis durch vollständige Induktion

$$\begin{array}{c} \triangle \\ n \in \mathbb{R} \\ n \geq -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \triangle \\ n \in \mathbb{N} \end{array}$$

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

Setze $n=1$ I Ind. Anfang: zu zeigen $A(n) (w)$

$$(1+h)^1 \geq 1+1h$$

$$1+h \geq 1+1h$$

(w)

II Ind. Schritt: zu zeigen $A(n) = A(n+1)$ sei $n \in \mathbb{N}$ fest

a) Ind. Vor: $A(n) (w) \quad (1+h)^n \geq 1+nh$

b) Ind. Beh: $A(n+1) (w) \quad (1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h$
 $\geq 1+nh+h$

c) Beweis: $(1+h)^n \geq 1+nh$
 $(1+h)^n \cdot (1+h) \geq (1+nh)(1+h)$
 $(1+h)^{n+1} \geq 1+h+nh+nh^2$
ged.

$nh^2 \geq 0$ nach
Voraussetzung

17) Man bestimme den Koeffizienten der Potenz a^5
in der Entwicklung von $(2-5a)^{13}$

binomischer Lehrsatz:

$$\begin{array}{l} n=13 \\ k=5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \triangle \\ a, b \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \triangle \\ n \in \mathbb{N} \end{array}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} 2^{13-k} (-5a)^k$$

$$= \binom{13}{5} 2^8 (-5a)^5 \quad (da - 1^5 = -1)$$

$$= - \frac{13 \cdot \cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot 9}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5}} 2^8 5^5 a^5$$

$$= - 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 2^8 \cdot 5^5 \cdot a^5$$

$$= - 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 256 \cdot 3125 \cdot a^5$$

$$= - 1029600000 a^5$$

18)

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

da $a, b \in \mathbb{R}_0^+$

$$ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$$

$$ab \leq \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + b^2$$

$$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$$

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

$$0 \leq a^2 + b^2 - 2ab$$

$$0 \leq (a-b)^2 \quad \text{qed.}$$

19)

$$|-4z_1 + 3\bar{z}_2|$$

$$\Leftrightarrow -4(2+3i) + 3(4+2i)$$

$$\Leftrightarrow -8 - 12i + 12 + 6i$$

$$\Leftrightarrow \underline{4 - 6i}$$

Realteil = 4

Imaginärteil = -6i

$$\frac{2z_1 - i}{i \cdot i - z_2}$$

$$\frac{2z_1 - i}{i \cdot i - z_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2+3i) - i}{i \cdot i - 4 - 2i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 + 6i - i}{i \cdot i - (4 + 2i)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 + 5i}{i(-4 + 3i)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 + 5i}{-4i + 3i^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 + 5i}{-4i + 3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4 + 5i)(-4i + 3)}{(-4i + 3)(-4i + 3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-16i - 12 - 20i^2 - 15i^2}{16i^2 + 12i - 12i - 9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-31i - 20i^2 - 12}{16i^2 - 9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-31i - 12 + 20}{16i^2 - 9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-31i + 8}{-25}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{31i}{25} - \frac{8}{25}$$

Imaginär-
teil

Realteil

$$i^2 = -1$$

20a)

$$\frac{x+3}{x-13} \geq x-6 \quad | \cdot (x-13)$$

Fall 1 $x > 13$

$$x+3 \geq (x-6)(x-13)$$

$$\Leftrightarrow x+3 \geq x^2 - 13x - 6x + 78 \quad | -3 - x$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq x^2 - 20x + 75$$

Weitenrechnung:

$$x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$x = 10 \pm \sqrt{100 - 75}$$

$$x = 10 \pm 5$$

$$x = 5 \vee x = 15$$

$$x^2 - 20x + 75 = (x-5)(x-15)$$

$$\Leftrightarrow x-5 \leq 0 \wedge x-15 \geq 0 \vee$$

$$x \geq 5 \wedge x \leq 15$$

$$L_1 =]13, 15]$$

Fall 2 $x < 13$

$$x+3 \leq (x-6)(x-13)$$

$$0 \leq (x-5)(x-15)$$

$$x \geq 5 \wedge x \geq 15$$

$$x \leq 5 \wedge x \leq 15$$

$$L =]-\infty, 5]$$

$$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, 5] \cup]13, 15]$$

20b)

$$|x+1| \leq 100 - 3$$

$$18 - \frac{x}{2}$$

NR:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

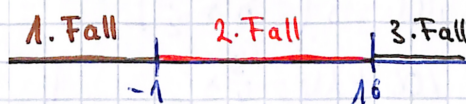
$$|x+1| = \begin{cases} x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \\ -(x+1) \text{ falls } x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \end{cases}$$

$$\left| 8 - \frac{x}{2} \right| = \begin{cases} 8 - \frac{x}{2} \text{ falls } 8 - \frac{x}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 16 \\ -8 + \frac{x}{2} \text{ falls } 8 - \frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow x > 16 \end{cases}$$

- 1. Fall $x < -1$

- 2. Fall $x \in [-1, 16]$

- 3. Fall $x > 16$



1. Fall $x < -1$

$$\Leftrightarrow -x - 1 \leq 100 - 3 \quad 18 - \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x - 1 \leq 100 - 24 - \frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 76 + \frac{5}{2}x$$

$$\Leftrightarrow -77 \leq \frac{5}{2}x \quad | : \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{154}{5} \leq x$$

$$L_1 = \left[-\frac{154}{5}, -1 \right[$$

2. Fall

$$x \in [-1, 16]$$

$$x+1 \leq 76 + \frac{3x}{2}$$

$$\frac{x}{2} \geq -75$$

$$x \geq -150$$

$$L_2 = [-1, 16]$$

nimmt man eine Ungleichung
• (-1) so verändert sich das
 $\leq$ - Zeichen

3. Fall

$$x > 16$$

$$x+1 \leq 100 - 3\left(-8 + \frac{x}{2}\right)$$

$$x+1 \leq 100 + 24 - \frac{3}{2}x$$

$$x \leq 123 - \frac{3}{2}x$$

$$\frac{5}{2}x \leq 123$$

$$x \leq \frac{246}{5}$$

$$\leq 49 \frac{1}{5}$$

$$|-1$$

$$| + \frac{3}{2}x$$

$$| : \frac{5}{2}$$

$$L_3 =] 16, 49 \frac{1}{5}]$$

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = L \left[-\frac{154}{5}, \frac{246}{5} \right]$$

21a).

$$u^9 - 14u^5 - 32u = 0$$

$$u^9 - 14u^5 = 32u$$

$$u^8 - 14u^4 = 32$$

$$u^4 (u^4 - 14) = 32$$

$$x (x - 14) = 32$$

$$x^2 - 14x = 32$$

$$x^2 - 14x - 32 = 0$$

$$x^2 - 14x - 32 + 49 - 49 = 0$$

$$(x - 7)^2 - 81 = 0$$

$$(x - 7)^2 = 81$$

$$x - 7 = 9$$

$$x = 16$$

$$u^4 = 16$$

$$u = 2, 0$$

! Setze $u^4 = x$

da $u^4 = x$

$$K = \{0, 2\}$$

Probe:

$$2^9 - 14 \cdot 2^5 - 32 \cdot 2 = 0$$

$$512 - 448 - 64 = 0$$

$$512 - 512 = 0$$

b)

$$2\sqrt{13-x} - \sqrt{x+4} = 7 \quad |^2$$

$$(2\sqrt{13-x} - \sqrt{x+4})^2 = 49$$

$$(2\sqrt{13-x} - \sqrt{x+4}) \cdot (2\sqrt{13-x} - \sqrt{x+4}) = 49$$

$$4(13-x) - 4\sqrt{(13-x)(x+4)} + (x+4) = 49$$

$$52 - 4x - 4\sqrt{(13-x)(x+4)} + x + 4 = 49$$

$$7 - 3x - 4\sqrt{(13-x)(x+4)} = 0$$

$$7 - 3x = 4\sqrt{13x + 52 - x^2 - 4x}$$

$$49 - 42x + 9x^2 = 16(9x + 52 - x^2)$$

$$49 - 42x + 9x^2 = 144x + 832 - 16x^2$$

$$-42x + 9x^2 = 144x + 783 - 16x^2$$

$$25x^2 - 186x - 881 = 0$$

$$(5x - 93)^2 + 7768 = 8649$$

$$2 \cdot \sqrt{16} - \sqrt{9} = 7$$

$$4(\sqrt{16} - \sqrt{9})^2 = 49$$