

Übungen zur Höheren Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I
WS 2000/01

22. Man untersuche die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[4]{n^{-3}} - \sqrt{2} \cdot n^7 + 2}{\sqrt{8n^{14} + n} + 1000n^5 - \frac{1}{\sqrt{n}} - 3}; \quad b_n = \frac{3^{-2n} + 2 \sin(n^8)}{n^{-n} + \sqrt[6]{n^5}} \quad \text{auf Konvergenz.}$$

23. Man bestimme $x \in \mathbb{N}$ so, daß gilt $\sum_{k=x}^{\infty} \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}\right)^k = -\frac{16}{405}$.

24. ✓ Man ergänze:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a_1	82	-40	$\frac{1}{9}$	675	-10	2916
d	2	1	*	*	*	*
q	*	*	9	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
n	10	86	7	4	3	7
a_n	100	45	59049	12168	-2,5	256
s_n	910	215	664301	43 $\frac{3}{4}$	-7,5	2660
	arithmetische Folgen		geometrische Folgen			

25. Man beweise oder widerlege:
Summe bzw. Produkt zweier beliebiger geometrischer Folgen sind wieder geometrische Folgen.

26. Man bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $\lg(x^2 - 3) + \lg(x^2 + 3) = 2\lg x + \lg 8$. $x = \pm 3$

27. Für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soll gelten: $a_2 = 22$ und $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} - a_n = (2n + 3) 3^n + 2$.

Man zeige, daß gilt: $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n = n \cdot 3^n + 2n$.

Abgabe: bis spätestens **Montag, 20.11.00, 14.00 Uhr** im Postfach „Höhere Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“
im Raum H-C 5326 (AVZ, Ebene 5); nicht Postfach Prof. Dr. Fröhlich!

Bitte vermerken sie neben ihrem **Namen** auch ihre **Gruppenzugehörigkeit** bzw. -nummer!!!
Danke!!!

22) Man untersuche die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[4]{n^{-3}} - \sqrt{2} \cdot n^7 + 2}{\sqrt{8n^{14} + n} + 1000n^5 - \frac{1}{\sqrt{n}} - 3}$$

auf Konvergenz.

Konvergiert gegen Null Konvergiert gegen 2

$$a_n = \frac{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[4]{n^{-3}} - \sqrt{2} \cdot n^7 + 2}{\sqrt{8n^{14} + n} + 1000n^5 - \frac{1}{\sqrt{n}} - 3}$$

$n^{14} \left(8 + \frac{1}{n^{14}} \right)$

Konvergiert gegen null

Konvergiert gegen null

$$= \frac{n^7 \left(\sqrt[5]{2} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} - \sqrt{2} + \frac{2}{n^7} \right)}{n^7 \left(8n^{\frac{1}{14}} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1000}{n^2} - \frac{1}{n^{\frac{25}{2}}} - \frac{3}{n^7}}$$

gegen $8^{\frac{1}{2}}$ Konvergiert gegen null

$$= \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$$

$$= -\sqrt{\frac{8}{2}} = -\frac{1}{2}$$

23) $x \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $\sum_{k=x}^{\infty} \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}\right)^k = -\frac{16}{405}$

unendliche geometrische Reihe
mit $q = -\frac{2}{3}$

wegen $|q| < 1$

$$\sum_{k=x}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}\right)^k \right) = \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}\right)^x}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{16}{405} \quad \left| \begin{array}{l} a_1 \\ 1-q \end{array} \right.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_n q^{n-1} = \frac{a_1 \cdot n}{1-q}$$

$$\sum_{k=x}^{\infty} \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}\right)^k = \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}\right)^x}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{16}{405}$$

$$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} \left(-\frac{2}{3}\right)^x = -\frac{16}{405}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^x = -\frac{2^5}{3^5}$$

$$= -\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\right)^5$$

$$x = 5$$

Aufzinsungsfaktor

Abzinsungsfaktor

Reinkurswert

Reinkurswert

23.

$$\sum_{k=x}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^k = -\frac{16}{405} \quad x \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=x}^{\infty} a_k \cdot q^k = \frac{a_x}{1-q} = - \frac{16}{405}$$

$$q = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^x = a^x$$

$$\boxed{x=5}$$

$$n, \quad n^2$$

27 vollst. Incl.

$$x = \frac{6/10}{1/9 - 2/3} = -3$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 2 \\ 1 + \frac{2}{3} \\ 1 \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{10}$$

$$1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{6}{10}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{if } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}^x$$

$$\log\left(-\frac{2}{3}\right) = \log \frac{6}{10} = \log 6$$

24a)

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$100 = a_1 + (10-1) \cdot 2$$

$$S_n = \frac{10}{2} (82 + 100)$$

$$100 = a_1 + 18$$

$$S_n = 5 \cdot 182$$

$$\underline{\underline{a_1 = 82}}$$

$$\underline{\underline{S_n = 910}}$$

b) $45 = -40 + (n-1)d$

$$S_n = \frac{n}{2} (-40 + 45)$$

$$85 = 85d$$

$$215 = \frac{n}{2} \cdot 5$$

$$\underline{\underline{d = 1}}$$

$$S_n = 430$$

$$\underline{\underline{n = 86}}$$

c) $a_n = a_1 \cdot 9^{n-1}$

$$S_n = \frac{1}{9} \cdot \frac{1-9^n}{1-9}$$

$$59049 = \frac{1}{9} \cdot 9^{n-1}$$

$$S_n = \frac{1}{9} \cdot \frac{-4782965}{-8}$$

$$9 \cdot 59049 = 9^{n-1}$$

$$\underline{\underline{S_n = 66430106944}}$$

$$\log_9 \cdot \log_9 59049 = n-1$$

$$\log_9 59049 + 1 = n-1$$

$$\log_9 59049 = n-2$$

$$\frac{\log_9 59049}{\log_9 9} = n-2$$

$$5 = n-2$$

$$\underline{\underline{n = 7}}$$

d)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$43\frac{3}{4} = a_1 \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$43\frac{3}{4} = a_1 \frac{0.68359375}{0.25}$$

$$43\frac{3}{4} = 2.734375 a_1$$

$$\underline{\underline{a_1 = 16}}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = 16 \cdot 0.75^{4-1}$$

$$\underline{\underline{a_n = 6.75}}$$

e)

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

~~$$-7,5 = a_1 \cdot \frac{1 - q^3}{1 - q}$$~~

$$-2,5 = a_1 q^{3-1}$$

$$\underline{\underline{-2,5 = a_1 q^2}}$$

$$-7,5 = a_1 - a_1 q^2$$

durch einsetzen folgt:

$$-7,5 = a_1 - 2,5$$

$$\underline{\underline{a_1 = -10}}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$-1,5 = -10 \cdot q^2$$

$$q^2 = 0,25$$

$$\underline{\underline{q = 0,5 = \frac{1}{2}}}$$

f) $a_1 = 2916$

$$q = ?$$

$$a_n = 256$$

$$n = 7$$

$$S_n = ?$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$256 = 2916 \cdot q^6 \quad | \sqrt[6]{}$$

$$\underline{\underline{q = \frac{2}{3}}}$$

$$S_n = 2916 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^7}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= 2916 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6\right)$$

$$= 2916 - 2916 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$= 2916 - 256$$

$$\underline{\underline{= 2660}}$$

25)

$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}}$

$$a_n (1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}, \dots) \quad b_n (1, 3, 9, \dots, 3^{n-1}, \dots)$$

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

Summe

$$a_n + b_n = c_n$$

c_n = geometrische Folge

$$c_n : (2, 5, 13, 35, \dots)$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ 13 & 35 \\ \hline 15 & 13 \end{array}$$

aus der add. zweier beliebiger Folgen ergibt sich nicht unbedingt eine geom. Folge

Produkt

$$a_n \cdot b_n = d_n$$

$$d_n = (1, 6, 36, 216, \dots)$$

$$\begin{array}{ccccc} & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ & 6 & 6 & 6 & 6 \end{array}$$

Beweis durch Vollständige Induktion

a_n ist geometrische Folge $\wedge$ b_n ist geom. Folge

$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}}$

$$a_n \cdot b_n = d_n$$

wobei d_n auch geom. Folge ist.

Vor

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = q_1 ; \frac{b_{n+1}}{b_n} = q_2 \right) \quad \bigvee_{q \in \mathbb{R}}$$

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n = d_n$$

Behauptung

$$\bigvee_{q \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} : \frac{d_{n+1}}{d_n} = q_3$$

Beweis

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}{a_n \cdot b_n}$$

$$= \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$= q_1 \cdot q_2$$

$$= \underline{q_3}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \cdot q^{(k-1)}$$

Folge: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$a_{n+1} = a_n \cdot q^n = \underbrace{a_1 \cdot q^{n-1}}_{a_n} \cdot q$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

25.

Produkt:

$$\bigvee_{q \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q_1$$

$$a_n = 1, 3, 5, 7 \rightarrow \text{arithm.}$$

$$a_n = 2, 4, 8, 16, 32 \dots$$

$$b_n = 3, 7, 27 \dots$$

$$a_n \cdot b_n = 6, 36, 216 \dots$$

$$\text{Faktor } q \quad 6 \quad 6 \quad 6 \dots$$

Verdacht dass Behauptung (w)

$$a_n + b_n = 5, 13, 35$$

$$\text{Faktor } \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{a_n + b_n} = 2,6 \quad 2,692$$

Verdacht dass Behauptung (f)

Beweis dass nicht
allgemeingültig

26) Man bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\lg(x^2-3) + \lg(x^2+3) = 2 \lg x + \lg 8$$

$$\lg(x^2-3)(x^2+3) = \lg 8x^2$$

$$10^{\lg(x^2-3)(x^2+3)} = 10^{\lg 8x^2}$$

$$(x^2-3)(x^2+3) = 8x^2$$

$$x^4 + 3x^2 - 3x^2 - 9 = 8x^2$$

$$x^4 - 9 = 8x^2$$

$$x^4 - 9 - 8x^2 = 0$$

$$x^4 - 8x^2 - 9 + 16 - 16 = 0$$

$$(x^2-4)^2 - 9 - 16 = 0$$

$$(x^2-4)^2 = 25$$

$$x^2 - 4 = 5$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

$$\sum_{n=7}^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n = -\frac{16}{405}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad q = -\frac{2}{3}$$

$$= \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{10}$$

27) Für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soll gelten:

$$\underline{a_2 = 22} \text{ und } \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} = (2n+3)3^n + 2$$

Man zeige, daß gilt: $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n = n \cdot 3^n + 2n$

Beweis durch vollständige Induktion:

● Voraussetzung $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} = (2n+3)3^n + 2$

Behauptung $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n \stackrel{B(n)}{=} n \cdot 3^n + 2n \stackrel{A(n)}{}$

I Ind Anfang: zu zeigen $A(n) \text{ (w)}$

$$A(1) = (2 \cdot 1 + 3) \cdot 3^1 + 2 \cdot 1 = \underline{\underline{5}}$$

$$\begin{aligned} B(1) &= a_2 - a_1 = 5 \cdot 3^1 + 2 \\ &= 15 + 2 \\ 22 - 5 &= 17 \quad (\text{w}) \end{aligned}$$

Ind. - Schritt

Zu zeigen $\triangle_{n \in \mathbb{N}}$

$A(n) \Rightarrow B(n)$, Sei $n \in \mathbb{N}$ fest

- a) Ind. Annahme : $A(n)$ (w) d.h. $a_n = n 3^n + 2n$
b) Ind. Behauptung : $A(n+1)$ (w) d.h. $a_{n+1} = (n+1) 3^{n+1} + 2(n+1)$
c) Beweis:

$$a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + a_n = \underbrace{(2n+3)3^n + 2}_{a_{n+1} - a_n} + \underbrace{n 3^n + 2n}_{a_n}$$

$$a_{n+1} = 3^n \underbrace{(2n+3+n)}_{3n+3} + \underbrace{2+2n}_{2(n+1)}$$

$$= 3^{n+1} (n+1)$$

qed.