

Übungen zur Höheren Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

WS 2000/01

32. Man bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} -u - v - x + y - z &= -2 \\ 8u + 2v + 14y + 8z &= 32 \\ -7u - 6v - 3x - 17y - 12z &= 12 \\ 3u + 2v + x + 5y + 4z &= 2 \\ 4u + 3v + 2x + 6y + 5z &= 4 \end{aligned}$$

33. Man bestimme die Lösungsmengen folgender Systeme:

a)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -5 & -4 & 3 & -1 \\ 1 & 126 & 93 & -73 & 151 \\ 1 & 12 & 9 & -7 & 16 \end{array} \right)$$

b)
$$\begin{array}{rrcr} 3x & +7y & +2z & = & 14 \\ 5x & -4y & -4z & = & 3 \\ 4x & +25y & +10z & = & 39 \\ -10x & -39y & -14z & = & -67 \end{array}$$

34. Man bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 3x + 3y + az &= b \\ 5x + 3y + 3z &= 7 \\ -2x - 2y - 2z &= -2 \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von den Parametern a und b.

35. Man zeige: Die Vektoren $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ ($n \geq 2$) sind linear abhängig, wenn zwei von ihnen gleich sind.

36. Gegeben sind die Vektoren: $\bar{a} = (2, 1, -3)$; $\bar{b} = (-4, 3, 1)$; $\bar{c} = (2, 6, -8)$

Man untersuche für jeden der folgenden Vektoren, ob er als Linearkombination darstellbar ist und gebe ggf. alle Möglichkeiten an:

$\bar{x} = (6, 8, -14)$ als Linearkombination von $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

$\bar{y} = (10, 45, -54)$ als Linearkombination von $\bar{a}$, $\bar{c}$.

Abgabe: bis spätestens **Montag, 4.12.00, 14.00 Uhr** im Postfach „Höhere Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ im Raum H-C 5326 (AVZ, Ebene 5); **nicht** Postfach Prof. Dr. Fröhlich!
Bitte vermerken Sie neben Ihrem Namen auch Ihre **Gruppenzugehörigkeit** bzw.
– **nummer!!!** Danke!

32)

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -2 & 1 \cdot 8 & 1 \cdot (-7) & \\ & 8 & 2 & & 14 & 8 & 32 & & \\ -7 & -6 & -3 & -17 & -12 & 12 & & & \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 2 & & & \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & & & \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1 \cdot 8 \\ 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4}} \left(\begin{array}{cccccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -2 & & & \\ & 0 & -6 & -8 & 22 & 0 & 16 & & \\ & 0 & 1 & 4 & -24 & -5 & 26 & & \\ & 0 & -1 & -2 & 8 & 1 & -4 & & \\ & 0 & -1 & -2 & 10 & 1 & -4 & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{Umstelle} \\ \\ \\ \Leftrightarrow \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 24 & -5 & 26 \\ 0 & -1 & -2 & 10 & 1 & -4 \\ 0 & -6 & -8 & 22 & 0 & 16 \end{array} \right) \xRightarrow{1 \cdot (-1) \cdot (-1)} \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 32 & -4 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -26 & -6 & -8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \Leftrightarrow 1:2 \\ \Leftrightarrow 1:2 \\ \Leftrightarrow 1:2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -13 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45 & 1 & -26 \end{pmatrix} \quad | \cdot (-4) \quad | \cdot (-4)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -26 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow z = -26$$

→ $y = 0$

$$x + 16.0 - 2(-26) = 11$$

$$x + 52 = 11$$

$x = 41$

$$-v - 2(-41) + 8 \cdot 0 - 26 = -4$$

$$-V - 8L - 26 = -4$$

$$-V = 104$$

$$V = -106$$

$$-u - (-104) - (-41) + 1 \cdot 0 - (-26) = -2$$

$$-u + 104 + 41 + 26 = -2$$

$$-u = -173$$

$$u = 173$$

33)

$$a) \begin{pmatrix} -2 & -5 & -4 & 3 & | & 1 \\ 1 & 126 & 93 & -73 & | & 151 \\ 1 & 12 & 9 & -7 & | & 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 12 & 9 & -7 & | & 16 \\ 1 & 126 & 93 & -73 & | & 151 \\ -2 & -5 & -4 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot (-1) - 2 \text{ Spalte} \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \text{Null}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 9 & -7 & | & 16 \\ 0 & 114 & 84 & -66 & | & 135 \\ 0 & 19 & 14 & -11 & | & 31 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2} \begin{pmatrix} 1 & 12 & 9 & -7 & | & 16 \\ 0 & 19 & 14 & -11 & | & 22,5 \\ 0 & 19 & 14 & -11 & | & 31 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 9 & -7 & | & 16 \\ 0 & 19 & 14 & -11 & | & 22,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 8,5 \end{pmatrix}$$

Da $0 \neq 8,5$ ist die Lösungsmenge $L = \emptyset$

$$b) \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & | & 14 \\ 5 & -4 & -4 & | & 3 \\ 4 & 25 & 10 & | & 39 \\ -10 & -39 & -14 & | & -67 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & | & 14 \\ 4 & 25 & 10 & | & 39 \\ 5 & -4 & -4 & | & 3 \\ -10 & -39 & -14 & | & -67 \end{pmatrix} \cdot (-1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & | & 14 \\ 1 & 18 & 8 & | & 25 \\ 5 & -4 & -4 & | & 3 \\ -10 & -39 & -14 & | & -67 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 8 & | & 25 \\ 3 & 7 & 2 & | & 14 \\ 5 & -4 & -4 & | & 3 \\ -10 & -39 & -14 & | & -67 \end{pmatrix} \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot 10 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 18 & 8 & | & 25 \\ 0 & -47 & -22 & | & -61 \\ 0 & -94 & -44 & | & -122 \\ 0 & 141 & 66 & | & 183 \end{pmatrix} \cdot 1:2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 18 & 8 & | & 25 \\ 0 & -47 & -22 & | & -61 \\ 0 & -47 & -22 & | & -61 \\ 0 & 47 & 22 & | & 61 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 8 & | & 25 \\ 0 & -47 & -22 & | & -61 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 18 & 8 & | & 25 \\ 0 & -47 & -22 & | & -61 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 18 & 8 & | & 25 \\ 0 & 1 & \frac{22}{47} & | & \frac{61}{47} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$y + \frac{22}{47}z = \frac{61}{47}$$

$$y = \frac{61}{47} - \frac{22}{47}z$$

$$x + 18\left(\frac{61}{47} - \frac{22}{47}z\right) = 25$$

$$x + \frac{1098}{47} - \frac{396}{47}z = \frac{1175}{47}$$

$$x = -\frac{77}{47} + 8\frac{20}{47}z$$

$$\mathbb{L} \left\{ \left(-\frac{77}{47} + 8\frac{20}{47}z, \frac{61}{47} - \frac{22}{47}z, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

34)

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & a & | & b \\ 5 & 3 & 3 & | & 7 \\ -2 & -2 & -2 & | & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 5 & 3 & 3 & | & 7 \\ 3 & 3 & a & | & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3-a & | & 3-b \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 3-a & | & 3-b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 3-a & | & 3-b \end{pmatrix}$$

Fallunterscheidung:

$$a=3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3-b \end{pmatrix}$$

$$y+z = -1$$

$$y = -1-z$$

$$L \begin{cases} \emptyset \text{ falls } a=3 \wedge b \neq 3 \\ \{(2, -1-z, z)\} \text{ falls } a=3 \wedge b=3 \\ \{2, \frac{6-a-b}{a-3}, \frac{b-3}{a-3}\} \text{ falls } a \neq 3 \end{cases}$$

 $\Leftrightarrow$ falls $a \neq 3$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{6-a-b}{a-3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{b-3}{a-3} \end{pmatrix}$$

35)

Voraussetzung

$\vec{x}_1$ bis $\vec{x}_n$ mit $\bigvee_{i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\}} \vec{x}_i = \vec{x}_j$

mit $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ (o. B. d. A.)

Behauptung

$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ linear abhängig ($x_k = x_i$)
 $x_k \cdot x_i = 0$

d.h. $\bigvee_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}} \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \lambda_3 \vec{x}_3 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n = \vec{0}$

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_2 \rightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0}$$

und mind. ein $\lambda_i \neq 0$

Bew. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0 = \dots = \lambda_n = 0$

36)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ -3 & 1 & -8 & -14 \end{array} \right) \xrightarrow{1:2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ -3 & 1 & -8 & -14 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1: (-1) \\ (2)-(1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{1: (-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$z = 0$$

$$y = 1$$

$$x - 2 = 3$$

$$x = 5$$

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

für $\vec{y} = (10, 45, -54)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 10 \\ 1 & 6 & 45 \\ -3 & -8 & -54 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 45 \\ -3 & -8 & -54 \end{array} \right) \xrightarrow{1: (-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 40 \\ -3 & -8 & -54 \end{array} \right) \xrightarrow{1: 5}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

$$y = 8$$

$$x + 8 = 5$$

$$x = -3$$

→ durch Einsetzen in 3. Gl.:

$$-3(-3) + (-8)8 = -54$$

$$9 - 64 = -54$$

$$-55 \neq -54$$

Es existiert keine Linearkombination von $\vec{y}$ $\vec{a}$ $\vec{c}$!