

Übungen zur Höheren Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

WS 2000/01

37. Ein Vater hat 20 Jahre lang für seine Tochter jährlich vorschüssig 1600 DM eingezahlt. Zwei Jahre nach der letzten Einzahlung soll die Tochter die erste Auszahlung einer acht mal in jährlichen Abständen fälligen Rente erhalten, die zusammen mit einer Auszahlung in Höhe von 2000 DM, fällig zum Zeitpunkt der vierten dieser Rentenraten, genau durch die Einzahlungen finanziert werden soll. Wie hoch ist dann diese acht mal in gleicher Höhe fällige Rentenrate, (alle Zahlungstermine seien Jahreswechsel), wenn der Zinssatz anfangs 5 % beträgt, nach 14 Jahren auf 7 % steigt und nach weiteren 9 Jahren wieder auf 5 % fällt.

8011,40 927731

38

Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Man berechne, falls vorhanden: AB , $2BA$, AE_3 , E_4A , $3B - 2A$, $\frac{B}{B}$, $AA' - B^2$, $A'A$, A^2 , $A^{-1}B$, $(2A')(7B)$, $B + B'A - A'$.

39. Eine (n, n) -Matrix heißt genau dann obere Dreiecksmatrix, wenn gilt: $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \bigwedge_{1 \leq k \leq n} i > k \Rightarrow a_{ik} = 0$.

a. Man zeige im Fall $n=2$:

Sei M die Menge aller oberen $(2,2)$ -Dreiecksmatrizen. Dann ist $(M, +)$ eine Gruppe.

b. Man zeige im Fall $n=3$:

Das Produkt zweier beliebiger oberer $(3,3)$ -Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere $(3,3)$ -Dreiecksmatrix.

40

Man bestimme den Rang von

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ -9 & 9 & 5 & 6 & 6 \\ 9 & 8 & 5 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -7 \\ -2 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 12 & -5 & 6 \\ -17 & 5 & -27 & 37 \end{pmatrix}$

Zeile x Spalte

41

Man invertiere, falls möglich, die Matrizen

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Abgabe: bis spätestens **Montag, 11.12.00, 14.00 Uhr** im Postfach „Höhere Mathematik für

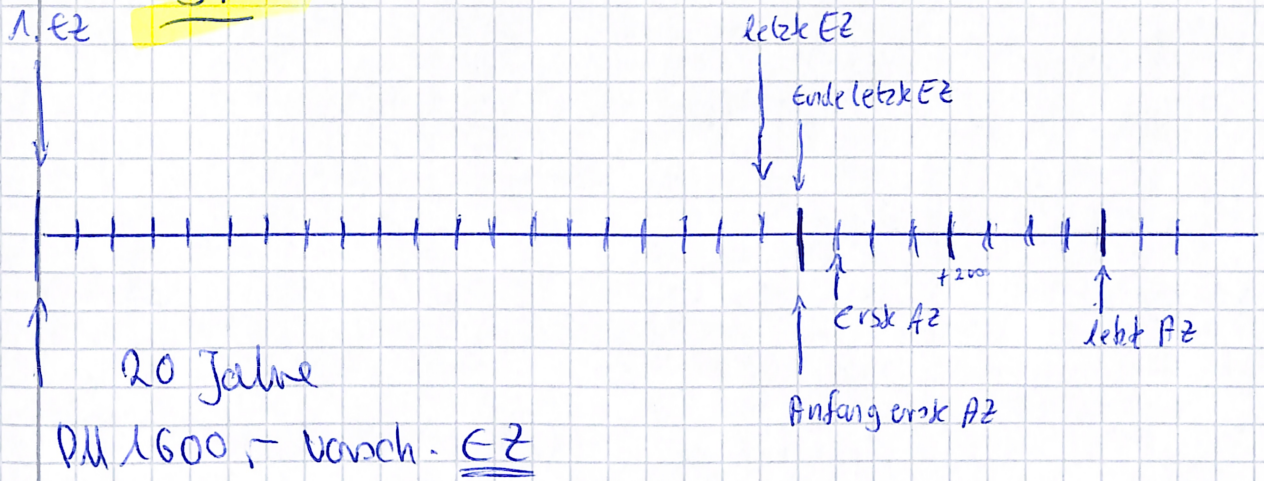
Wirtschaftswissenschaftler“ im Raum H-C 5326 (AVZ, Ebene 5); **nicht** Postfach Prof. Dr. Fröhlich!

Bitte vermerken sie neben ihrem **Namen** auch ihre **Gruppenzugehörigkeit bzw. -nummer!!!**

Danke!!!

37

1. EZ



vorschüssiger Rentenendwertfaktor für Einzahlung

$$S_n' = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = q \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

nachschüssiger Rentenbarwertfaktor für Auszahl.

$$r_{an} = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Einzahlung

$$1600 \cdot 1.06 \frac{1.06^{14} - 1}{1.06 - 1} = r_{an}$$

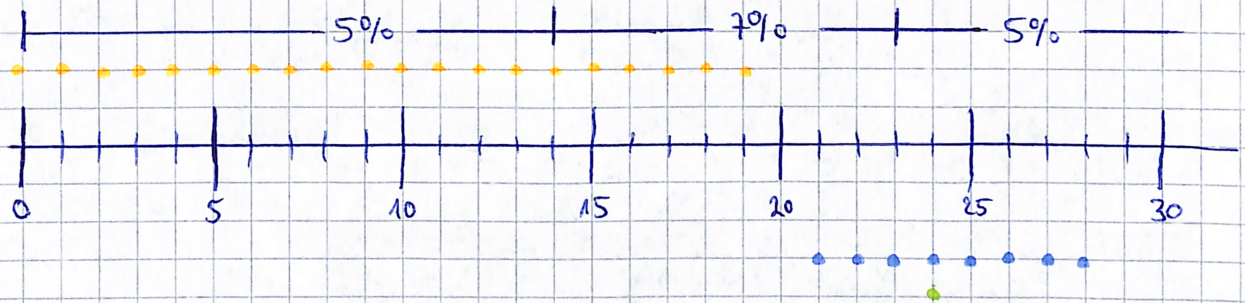
$$1600 \cdot 22,275970 + 1600 \cdot 22,275970 \left(1 + 6 \frac{7}{100}\right) = r_{an}$$

Auszahlung

$$\frac{1}{1.07^4} = r \cdot 5,389289 \cdot 2000 \frac{1}{1.06^4}$$

? Ergebnis

Aufgabe 37



- 20 x 1600,- vorschüssig
- 8 x ? nachschüssig
- 1 x 2000,-

$$1600 \cdot s_{\overline{14}|5\%} \cdot q_{7\%}^6 + 1600 \cdot s_{\overline{6}|7\%} = 2000 \cdot \frac{1}{q_{5\%}^4} \cdot \frac{1}{q_{7\%}^3} + r a_{\overline{3}|7\%} + r a_{\overline{5}|5\%} \frac{1}{q_{7\%}^3}$$

38)

AB) ist nicht definiert, da die Anzahl der Spalten von $A \neq$ der Anzahl der Zeilen von B ist. ✓

2BA)

$\begin{array}{ccc} 6 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \\ 14 & 0 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{array}$
$\begin{array}{cccc ccc} 2 & 4 & 10 & 0 & 52 & 64 & 24 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 44 & 28 & 16 \\ 2 & 0 & 4 & -8 & -84 & 20 & -32 \\ 6 & 2 & -4 & 2 & 48 & -32 & 64 \end{array}$	$\begin{array}{cccc ccc} 2 & 4 & 10 & 0 & 26 & 32 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 22 & 14 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & -8 & -42 & 10 & -16 \\ 6 & 2 & -4 & 2 & 24 & -16 & 32 \end{array}$

AE_3

$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{ccc ccc} 3 & -1 & 4 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 7 & 0 & 3 \end{array}$
--	---

Die Multiplikation einer Matrix A mit der Einheitsmatrix E_3 ergibt die Matrix A selbst. ✓

$E_4 A$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$3B - 2A$

ist nicht definiert (möglich, da die Matrizen unterschiedlicher Dimension sind!)

$\frac{B}{B}$

Die Division von Matrizen ist nicht definiert!

$AA^T - B^2$

NR:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 & 3 & 3 & 33 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 13 & 14 \\ 33 & 3 & 14 & 58 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 19 & -18 \\ 5 & 2 & 4 & -6 \\ -9 & -2 & 17 & -12 \\ 4 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$2u \quad A A' - B^2$$

$$\begin{pmatrix} 26 & 3 & 3 & 33 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 13 & 14 \\ 33 & 3 & 14 & 58 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 4 & 19 & -18 \\ 5 & 2 & 4 & -6 \\ -9 & -2 & 17 & -12 \\ 4 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -1 & -16 & 51 \\ -2 & 0 & -1 & 9 \\ 12 & 5 & -4 & 26 \\ 29 & -5 & 3 & 48 \end{pmatrix}$$

$$A' A$$

$$\begin{array}{cccc} & & & 3 & -1 & 4 \\ & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & 2 & 3 & 0 \\ & & & 7 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 7 & 62 & 3 & 33 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 11 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 3 & 33 & -3 & 26 \end{array} \quad \checkmark$$

$$A^2$$

A^2 ist nicht definiert, da A nicht quadratisch ist! $\checkmark$

$$A^{-1} B$$

$A^{-1} B$ ist nicht definiert, da AB nicht definiert ist! $\checkmark$

$$(2A')(7B)$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 & 14 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 35 & 0 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 7 & 0 & 14 & -28 \\ 21 & 7 & -14 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 14 & 35 & 0 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 7 & 0 & 14 & -28 \\ 21 & 7 & -14 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 & 14 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 364 & 182 & 70 & -14 \\ 28 & -14 & 42 & -154 \\ 182 & 168 & 224 & 56 \end{pmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ - \end{matrix}$$

$$B+B'$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ - \\ - \end{matrix}$$

$$A-A'$$

ist nicht möglich! -

11.12.00
fa

Aufgabe 39

$$1 \leq i \leq n$$

$$1 \leq k \leq n$$

$$i > k \Rightarrow a_{ik} = 0$$

a) $n = 2$

$$M = \left\{ A \mid A \text{ ist eine } (2,2) \text{ Dreiecksmatrix} \right\}$$

$(M, *)$ ist eine Gruppe

Verknüpfungsgebilde sei $A, B \in M$

z.z. $A+B \in M$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

- $(M, +)$ assoziativ, da Addition von $(2,2)$ Matrizen generell assoziativ sind.

- neutrales Element $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist neutrales Element $1 \in M$

- zu $M \in A$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ ist $B = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & -c \end{pmatrix}$ inverses $1 \in M$

b)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

40 a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ -9 & 9 & 5 & 6 & 6 \\ 9 & 8 & 5 & -1 & -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 12 & 8 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 2 & 5 & -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -24 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & -29 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -24 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -84 & -111 \end{pmatrix} = \underline{\underline{4}} \quad \checkmark$$

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -7 \\ -2 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 12 & -5 & 6 \\ -17 & 5 & -27 & 37 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -4 & 12 & -5 & 6 \\ -17 & 5 & -27 & 37 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 5 & -7 \\ -4 & 12 & -5 & 6 \\ -17 & 5 & -27 & 37 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -8 & -1 & 2 \\ 0 & 24 & 3 & -6 \\ 0 & 56 & 7 & -14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -8 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{2}} \quad \checkmark$$

41 a)

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 10 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 48 & 12 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

schreibweise

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -4 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 48 & 12 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -4 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -12 & 4 \end{array} \right]$$

— daher nicht invertierbar ✓

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{1 \cdot 7 \\ 1 \cdot 3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & -7 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -29 & 9 & 7 & 0 & 2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1 \cdot 29 \\ 1 \cdot 23 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & -7 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 74 & 58 & 46 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{1 \cdot 23 \\ 1 \cdot 4 \cdot 5}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 46 & 0 & -12 & 8 & 10 & 0 \\ 0 & 92 & 0 & 506 & 414 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 74 & 58 & 46 \end{array} \right] \xrightarrow{1 \cdot 7} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 46 & 0 & -12 & 8 & 10 & 0 \\ 0 & 92 & 0 & 506 & 414 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 74 & 58 & 46 \end{array} \right] \xrightarrow{1 \cdot 3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 46 & 0 & 0 & 230 & 184 & 138 \\ 0 & 92 & 0 & 506 & 414 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 74 & 58 & 46 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 11/2 & 4.5 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 18.5 & 14.5 & 11.5 \end{array} \right] \quad f.$$