

Übungen zur Höheren Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

WS 2000/01

A = Matrix

42. Man beweise oder widerlege, daß für jedes Paar von $(3, 3)$ - Matrizen A, B gilt:

a) $\det(A + 4B) = \det A + 4^3 \det B$

b) $\det(A + 4B) \neq \det A + 4^3 \det B$.

43. Gegeben sei A mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Für welche a ist A regulär? Man bestimme für diese a die Inverse, abhängig von a .

44. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 13 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 11 & 2 & 3 \\ 5 & 28 & 69 & 12 & 19 \\ 4 & 13 & 31 & 7 & 8 \\ 3 & 12 & 29 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 18 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}$$

96
~ 16

$\det A_2 \rightarrow$
 $\det A \rightarrow$

Man bestimme x_2 mit der Cramerschen Regel.

Ebene

45. Man suche das Maximum von $z(x, y) = 11,1 - 3x - 10y$ unter den Nebenbedingungen

① ② $x, y \geq 0$

③ $6x \geq 21 - 2y$

④ $x + 20 \geq 4y$

⑤ $11y \geq 22 - 2x$

⑥ $2y + 15 \geq 2x$

⑦ $2x + 2y \leq 31$

⑧ x, y ganzzahlig.

Lineare Optimierung

Abgabe: bis spätestens **Montag, 18.12.2000, 14.00 Uhr** im Postfach „Höhere Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ im Raum H-C 5326 (AVZ, Ebene 5); **nicht** Postfach Prof. Dr. Fröhlich!

Bitte vermerken sie neben ihrem **Namen** auch ihre **Gruppenzugehörigkeit** bzw. **-nummer!!!** Danke!!!

42)

$$\det(A + 4B) =$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + 4b_{11} & a_{12} + 4b_{12} & a_{13} + 4b_{13} \\ a_{21} + 4b_{21} & a_{22} + 4b_{22} & a_{23} + 4b_{23} \\ a_{31} + 4b_{31} & a_{32} + 4b_{32} & a_{33} + 4b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A + 4^3 \det B = \det A + 64 \det B$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + 64 \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + 64b_{11} & a_{12} + 64b_{12} & a_{13} + 64b_{13} \\ a_{21} + 64b_{21} & a_{22} + 64b_{22} & a_{23} + 64b_{23} \\ a_{31} + 64b_{31} & a_{32} + 64b_{32} & a_{33} + 64b_{33} \end{pmatrix}$$

*Auswahl Zahlen-
beispiel z.B.*

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = 0 \quad B = 0$$

Somit:

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 64b_{11} & a_{12} + 64b_{12} & a_{13} + 64b_{13} \\ a_{21} + 64b_{21} & a_{22} + 64b_{22} & a_{23} + 64b_{23} \\ a_{31} + 64b_{31} & a_{32} + 64b_{32} & a_{33} + 64b_{33} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_{11} + 4b_{11} & a_{12} + 4b_{12} & a_{13} + 4b_{13} \\ a_{21} + 4b_{21} & a_{22} + 4b_{22} & a_{23} + 4b_{23} \\ a_{31} + 4b_{31} & a_{32} + 4b_{32} & a_{33} + 4b_{33} \end{pmatrix}$$

*also $A = B$ und
somit Aussage b) widerlegt.*

Folgerung: Da b) bewiesen ist, ist a) widerlegt!

*zu a) und b) jeweils ein Gegenbeispiel
geben, sowohl a) als auch b): Beide Aussagen
sind falsch.*

43)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

nach Sarrus:

$$1 \cdot a \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot (-2) - 1 \cdot a \cdot (-1) - (-2) \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a + 3 + 2 + a + 6 - 4 \Leftrightarrow 5a + 7 = 0$$

$$a = -\frac{7}{5}$$

- für $a = -\frac{7}{5}$ ist A regulär ✓

A ist regulär $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{7}{5}\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{7}{5} & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & 15 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-5) \\ | \cdot (-1) \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 20 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \dots ? \quad [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

44)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 13 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 11 & 2 & 3 \\ 5 & 28 & 69 & 12 & 19 \\ 4 & 13 & 31 & 7 & 8 \\ 3 & 12 & 29 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 18 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 13 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 11 & 2 & 3 \\ 5 & 28 & 69 & 12 & 19 \\ 4 & 13 & 31 & 7 & 8 \\ 3 & 12 & 29 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 69 \cdot 7 \cdot 9 + 5 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 3 + 13 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 4 \cdot 12 + 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 + 4 \cdot 1 \cdot 28 \cdot 31 \cdot 6 - 3 \cdot 13 \cdot 69 \cdot 2 \cdot 4 - 12 \cdot 31 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 2 - 29 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 1 \cdot 5 - 6 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 13 - 9 \cdot 4 \cdot 28 \cdot 11 \cdot 3 =$$

$$34776 + 15840 + 32712 + 16965 + 20832 - 21528 - 26784 - 19285 - 12480 - 33264 =$$

$$121125 - 113341 = 7784$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 13 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 11 & 2 & 3 \\ 5 & 18 & 69 & 12 & 18 \\ 4 & 18 & 31 & 7 & 8 \\ 3 & 18 & 29 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 69 \cdot 7 \cdot 9 + 12 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 3 + 13 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 4 \cdot 18 + 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 18 \cdot 29 + 4 \cdot 1 \cdot 18 \cdot 31 \cdot 6 - 3 \cdot 18 \cdot 69 \cdot 2 \cdot 4 - 18 \cdot 31 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 2 - 29 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 1 \cdot 12 - 6 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 13 - 9 \cdot 4 \cdot 18 \cdot 11 \cdot 3 =$$

$$52164 + 38016 + 35568 + 23490 + 13392 - 29808 -$$

$$40176 - 46284 - 18720 - 21384$$

$$= 162630 - 156372 = 6258$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{96}{-16} = -6$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{6258}{7784} = 0.8039568$$

Außerdem auflösen mittels Cramerscher Regel.

Fröhliche Weihnachten
und ein gutes neues Jahr!

42) - Kann man die obere Aussage beweisen, ist damit die untere widerlegt.

- Ist die untere bewiesen, ist die obere Aussage widerlegt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A+4B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1$$

$$\det B = 6$$

$$\det A+4B = 5 \cdot 9 \cdot 13 = 585$$

$$\det A + 4 \det B = 1 + 384 = 385 \neq \text{also ungleich!}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B = A+4B$$

$$\det A = 0 = \det B = \det A+4B$$

43)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ a & a-1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a+2 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -a-2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5a+7 & 0 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & a-2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

A ist regulär
wenn $a \neq -\frac{7}{5}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a-1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5a+7 & 0 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & a-2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5a+7 & 0 & 0 & 4a+8 & -12 & a+11 \\ 0 & 5a+7 & 0 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & a-1 & -a+2 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4a+8}{5a+7} & -\frac{12}{5a+7} & \frac{a+11}{5a+7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5a+7} & \frac{5}{5a+7} & -\frac{4}{5a+7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a+2}{a-1} & -\frac{1}{a-1} & \frac{3}{a-1} \end{array} \right)$$

(44)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 13 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 11 & 2 & 3 \\ 5 & 28 & 69 & 12 & 19 \\ 4 & 13 & 31 & 7 & 8 \\ 3 & 12 & 29 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 18 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Man bestimme x_2 mit der Cramerschen Regel

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \quad \text{mit } \det A \neq 0$$

2	12	13	3	4
1	6	11	2	3
5	18	69	12	19
4	18	31	7	8
3	18	29	6	9

2	5	13	3	4
1	4	11	2	3
5	28	69	12	19
4	13	31	7	8
3	12	29	6	9

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 & -1 & -2 \\ 1 & 6 & 11 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 36 & 6 & 10 \\ 1 & 0 & +2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -9 & -1 & -2 \\ 2 & 36 & 6 & 10 \\ 1 & +2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$6 \cdot (-4) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot (-4) \left[0 \cdot 6 \cdot (-1) + (-1 \cdot 10 \cdot 1) + \right. \\ \left. [-2 \cdot 2 \cdot 1] - [1 \cdot 6 \cdot 2] - [1 \cdot 10 \cdot 0] - \right. \\ \left. [(-1) \cdot 2 \cdot 1] \right]$$

$$\Leftrightarrow -24 \begin{bmatrix} -10 & -4 & +12 & -2 \\ 10 & +4 & -12 & +2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -24 \cdot (-4) = +96$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 13 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 11 & 2 & 3 \\ 5 & 28 & 69 & 12 & 19 \\ 4 & 13 & 31 & 7 & 8 \\ 3 & 12 & 29 & 6 & 9 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 3 & 9 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -14 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -13 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$4 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 4 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -8 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+4 \cdot (-1) \left[(3 \cdot (-2) \cdot 4) + (1 \cdot (-4) \cdot 3) + (2 \cdot (-8) \cdot 1) - (3 \cdot (-2) \cdot 2) - (1 \cdot (-4) \cdot 3) - (4 \cdot (-8) \cdot 1) \right] \Leftrightarrow$$

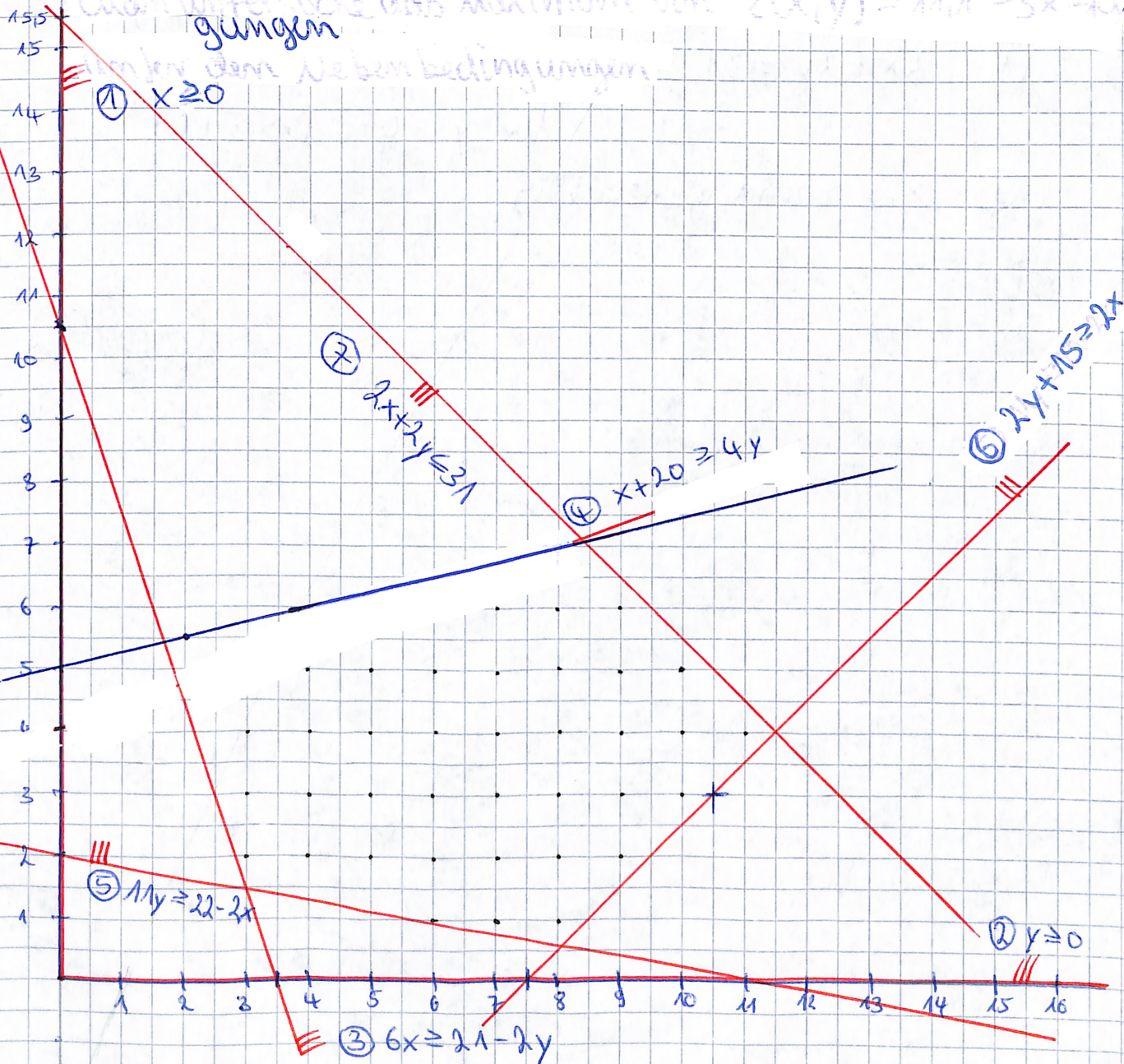
$$+4 \cdot (-1) \left[(-24) + (-12) + (-16) - (-12) - (-12) - (-32) \right] \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot (-1) \cdot 4 = -16$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{+96}{-16} = -6$$

45)

Man untersuche das Maximum von
 $Z(x,y) = 11,1 - 3x - 10y$ unter den Nebenbedingungen



① $x \geq 0$

② $y \geq 0$

③ $6x \geq 21 - 2y$

für $x = 0$ $(0 | \frac{21}{2})$

für $y = 0$ $(\frac{21}{6} | 0)$

④ $x + 20 \geq 4y$

für $x = 0$ $(0 | 5)$

für $y = 0$ $(-20 | 0)$ $(8 | 7)$ $(4 | 6)$

⑤ $11y \geq 22 - 2x$

für $x = 0$ $(0 | 2)$

für $y = 0$ $(11 | 0)$

$$\textcircled{6} \quad 2y + 15 \geq 2x$$

$$\text{für } x=0 \quad (0 \mid -7,5)$$

$$\text{für } y=0 \quad (7,5 \mid 0), (10,5 \mid 13)$$

$$\textcircled{7} \quad 2x + 2y \leq 31$$

$$\text{für } x=0 \quad (0 \mid 15,5)$$

$$\text{für } y=0 \quad (15,5 \mid 0)$$

$\textcircled{8} \quad x, y$ sind ganzzahlig

$$z(x, y) = 11,1 - 3x - 10y$$

$$z = 11,1$$

$$11,1 = 11,1 - 3x - 10y$$

$$3x = -10y$$

$$x = -\frac{10}{3}y$$