

46. Man bestimme die Lösungsmenge des folgenden Optimierungsproblems:

$$Z(x, y) = 56x - 49y - 1845 \rightarrow \min!$$

Unter den Nebenbedingungen:

① $x, y \geq 0$, ② $7y - 8x - 1 \leq 0$, ③ $x + y + 45 \geq 0$, ④ $7 - y \geq 0$, ⑤ $x + y \leq 15$, ⑥ $x \leq 2y$, ⑦ $7y + 4x \geq 25$.

47. Welche der folgenden Grenzwerte existieren, welche im uneigentlichen Sinne?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2,7x^3 + 1}{-3x^3 - 20} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{18 + 0,1x^3}{10^{40}x^2} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos 2x ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^3|}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2,7x^3 + 1}{-3x^3 - 20} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{18 + 0,1x^3}{10^{40}x^2} ; \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^3|}{x^3}$$

48. Man bestimme ($a \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow -a-0} \frac{x^3 + a^3}{|x + a|} ; \lim_{x \rightarrow -a+0} \frac{x^3 + a^3}{|x + a|} ; \lim_{x \rightarrow -a} \frac{x^3 + a^3}{|x + a|} ; \lim_{x \rightarrow -a} \frac{|x^3 + a^3|}{x + a} ; \lim_{x \rightarrow -a} \frac{|x^3 + a^3|}{|x + a|} ; \lim_{x \rightarrow -a} \frac{x^3 + a^3}{x + a}$$

Polynomdivision (wie 1. und 2. Aufgabe)

ähnlich wie 1. u. 2. Aufg.

49. Kann man f an den Definitionslücken so erklären, daß eine (dort) stetige Funktion entsteht?

a) $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 6x + 8}$

b) $f(x) = \frac{|x + 4|}{x^2 + 7x + 12}$

c) $f(x) = \frac{x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x}{x^3 - x^2 - 6x}$

50. Für $a \in \mathbb{R}$ sei $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_a(x) = \begin{cases} |3x - a| & \text{für } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist f_a stetig? Man zeichne den Graphen von f_a für $a = 3$ sowie für $a = 0$.

Abgabe: bis spätestens **Montag, 08. 01. 01, 14.00 Uhr**, im Postfach „Höhere Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ im Raum H-C 5326 (AVZ, Ebene 5); **nicht** Postfach Prof. Dr. Fröhlich!

Bitte vermerken sie neben ihrem Namen auch ihre Gruppenzugehörigkeit bzw. -nummer! Danke!

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Aufgabe 46

Man bestimme die Lösungsmenge des folgenden Optimierungsproblems

$$z(x,y) = 56x - 49y - 1845 \rightarrow \min!$$

$$\textcircled{1} x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$\textcircled{2} 7y - 8x - 1 \leq 0$$

$$7y \leq 8x - 1$$

$$y \leq \frac{8}{7}x + \frac{1}{7}$$

$$\textcircled{3} x + y + 45 \geq 0$$

$$x + y \geq -45$$

$$x \geq -45 \quad (-45 \mid 0)$$

$$y \geq -45 \quad (0 \mid -45)$$

$$\textcircled{4} 7 - y \geq 0$$

$$7 \geq y$$

$$y \leq 7$$

$$\textcircled{5} x + y \leq 15$$

$$10 + 5 \leq 15$$

$$(10 \mid 5)$$

$$5 + 10 \leq 15$$

$$(5 \mid 10)$$

$$\textcircled{6} x \leq 2y$$

$$\frac{1}{2}x \leq y$$

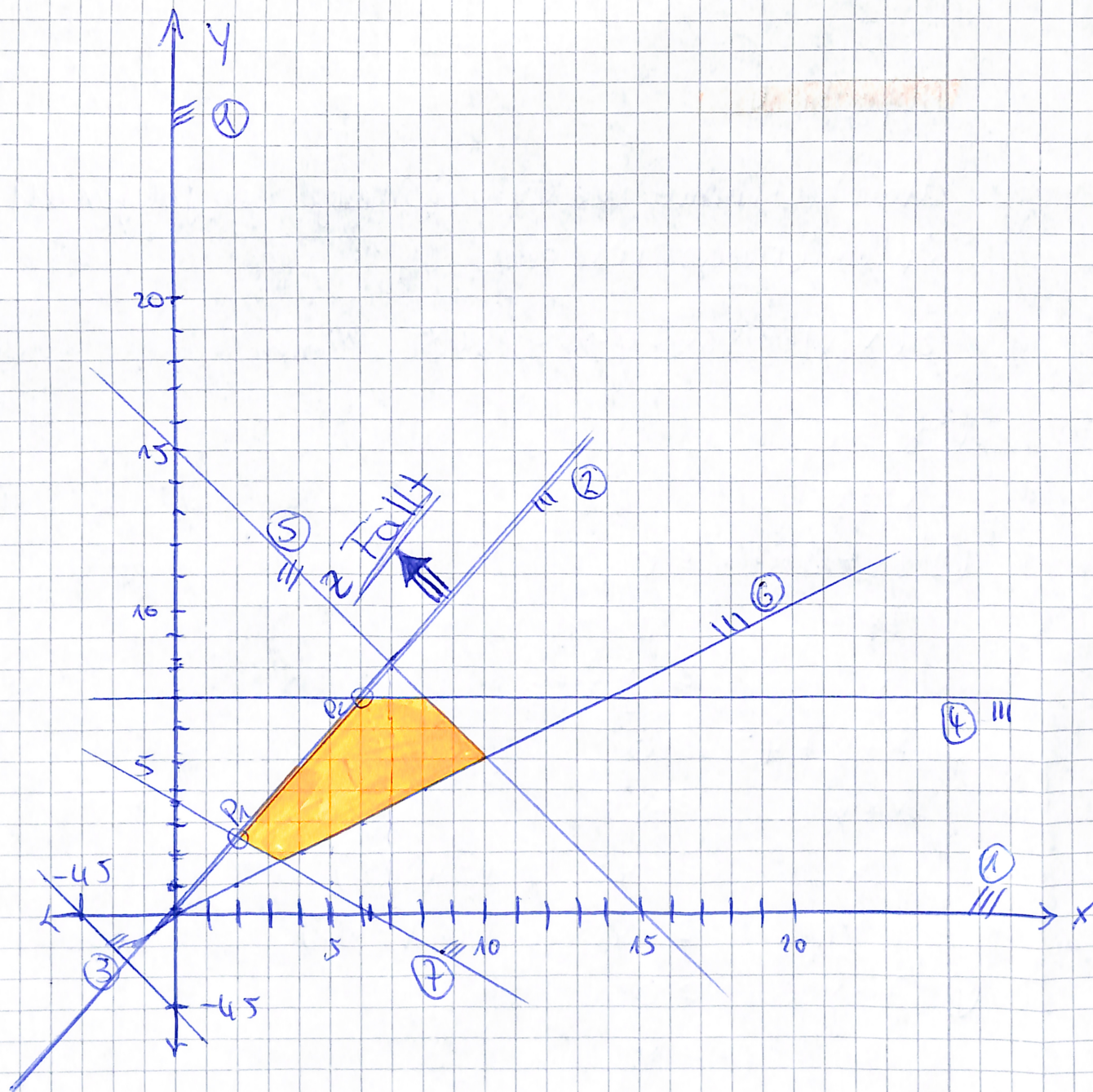
$$y \geq \frac{1}{2}x$$

$$\textcircled{7} 7y + 4x \geq 25$$

$$7y \geq 25 - 4x$$

$$y \geq -\frac{4}{7}x + \frac{25}{7}$$

$$(0 \mid \frac{25}{7}) \quad (\frac{25}{4} \mid 0)$$



Berechnung des MW:

$$z(x, y) = 56x - 49y - 1845 \rightarrow \text{Min}$$

$$z = -1845 \Leftrightarrow 49y = 56x$$

$$y = \frac{8}{7}x$$

8 nach oben

7 nach rechts

Vom Nullpunkt aus!

Die Ebene ist Parallel zu ②
und liegt $\frac{1}{7}$ unter ②

- Wie weist sich die Ebene?

- Man nimmt einen beliebigen Punkt (1|0) und
setzt ein! $56 - 1845 \Rightarrow -1845$

Da die Ebene z mit 3 parallel ist, ist anzunehmen dass die Strecke $\overline{P_1 P_2}$ Minimum des Optimierungsproblems ist.

Man nimmt die beiden Geraden, die die Strecke $\overline{P_1 P_2}$ bilden und macht aus der Ungleichung eine Gleichung. Da es sich hier um eine Strecke und nicht um eine Ebene handelt.

$$\begin{array}{r} 7y - 8x = 1 \\ - | 7y + 4x = 25 \\ \hline -12x = 24 \end{array}$$

$$x = -2$$

$$y = \frac{17}{7}$$

$$P_1 \left(2 \mid \frac{17}{7} \right)$$

$$7y - 8x = 1$$

$$y = 7$$

$$x = 6$$

$$P_2 (6 \mid 7)$$

Jeder Punkt der Verbindungsstrecke $\overline{P_1 P_2}$ einschl. der Endpunkte bildet das Min und gehört somit zur LSG

$$L = \left\{ \left(x, \frac{1}{7} + \frac{8}{7}x \right) \mid 2 \leq x \leq 6 \right\}$$

47)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x} = 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2,7x^3 + 1}{-3x^3 - 20} = \frac{x^3 (2,7 + \frac{1}{x^3})}{x^3 (-3 - \frac{20}{x^3})} = \frac{2,7 + 0}{-3 - 0} = \underline{\underline{-0,9}} \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{18 + 0,1x^3}{10^{40} x^2} = \frac{x^2 (\frac{18}{x^2} - 0,1x)}{x^2 \cdot 10^{40}} = \frac{-0,1x}{10^{40}} = -\infty \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos 2x \quad \text{divergiert unbestimmt} \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^3|}{x^3} = \frac{|x^3 \cdot 1|}{x^3 \cdot 1} = -1 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5}{x} = \infty \quad \checkmark \quad \text{ex. nicht, auch kein ungerades Vielfaches}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2,7x^3 + 1}{-3x^3 - 20} = \frac{1}{-20} = -0,05 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{18 + 0,1x^3}{10^{40} x^3} = +\infty \quad \checkmark \quad \frac{x^3 (\frac{18}{x^3} + 0,1)}{x^2 \cdot 10^{40}} = \frac{0,1x}{10^{40}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x = 1 \quad \checkmark \quad (\text{da } \cos 0 = 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^3|}{x^3} = \frac{x^3 (1/1)}{x^3} = 1 \quad \checkmark \quad \text{ex. nicht, da einmal } \lim = -1 \text{ u. } \lim = 1 \text{ ls.}$$

48)

$$\lim_{x \rightarrow -a-0} \frac{x^3 + a^3}{|x+a|} = \frac{x^3 + a^3}{x+a} = \frac{-a^3 + a^3}{2a} = \frac{0^+}{2a} = \underline{\underline{0^+}} \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -a+0} \frac{x^3 + a^3}{|x+a|} = \frac{-a^3 + a^3}{2a} = \frac{0}{2a} = \underline{\underline{0^-}} \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -a} \frac{x^3 + a^3}{|x+a|} = \frac{-a^3 + a^3}{2a} = 0 \quad \text{falls } a=0$$

2 Möglichkeiten
korrektur

$$\lim_{x \rightarrow -a} \frac{|x^3 + a^3|}{x+a} = \frac{|-a^3 + a^3|}{-a+a} = \frac{2a^3}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -a} \left| \frac{x^3 + a^3}{x+a} \right| = \left| \frac{-a^3 + a^3}{-a+a} \right| = \frac{2a^3}{2a} = a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -a} \frac{x^3 + a^3}{x+a} = \frac{-a^3 + a^3}{-a+a} = 0$$

49)

a) $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 6x + 8}$ $D: f(x) := \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\}$

Setze $f(2) := 1$

Def + Lücke bei $x=2$ und $x=4$

stetig

Polstelle
nicht stetig

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

Somit ist $f(x)$ überall stetig

b) $f(x) = \frac{|x+4|}{x^2 + 7x + 12}$ $D: f(x) := \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

✓

Diese Funktion wächst über alle Schranken bzw. fällt unter alle Grenzen

c) $f(x) = \frac{x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x}{x^3 - x^2 - 6x}$ $D: f(x) := \{x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}\}$

Setze $f(3) := 2$

3 Def. Lücken $x=0$
 $x=3$
 $x=-2$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \rightarrow \text{überall stetig}$$

48)

$$\lim_{x \rightarrow -a-0} \frac{x^3 + a^3}{|x+a|}$$

Polynomdivision

$$x^3 + a^3 : (x+a) = x^2 - ax + a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -a-0} \frac{(x^2 - ax + a^2) \cancel{(x+a)}}{(-1) \cdot \cancel{|x+a|}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -a} & - (x^2 - ax + a^2) && \text{für } x = -a \text{ einsetzen} \\ & -a^2 - a^2 - a^2 = -3a^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -a+0} \frac{x^3 + a^3}{|x+a|}$$

Durch Polynomdivision erhält man folgendes Ergebnis

$$x^3 + a^3 : (x+a) = x^2 - ax + a^2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -a+0} & x^2 - ax + a^2 && \text{für } x = -a \text{ einsetzen} \\ & +a^2 + ax + a^2 = 3a^2 \end{aligned}$$

49a)

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 6x + 8}$$

- Man untersucht, ob und wo Definitionslücken existieren
- Die Definitionslücken sind Nullstellen des Nenners.

$$x = 3 \pm \sqrt{9-8}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{1}$$

$$x = 3 \pm 1$$

$$x = 4 \wedge x = 2$$

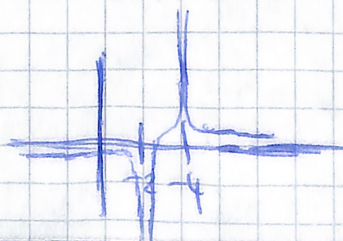
Es existieren Definitionslücken bei $x=4$ und $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+6)}{(x-2)(x-4)} = \frac{8}{-2} = -4$$

An der Definitionslücke $x=2$ entsteht an der Festsetzung $f(2) = -4$ Stetigkeit.

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+6)}{x-4} \text{ existiert nicht als reelle Zahl!}$$

An der Definitionslücke $x=4$ lässt sich f nicht so definieren dass eine dort stetige Funktion entsteht.



49c)

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x}{x^3 - x^2 - 6x}$$

- Man untersucht, ob und wo Definitionslücken existieren.
- Die Definitionslücken sind Nullstellen des Nenners.

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$= 3 \text{ und } -2$$

Es existieren Definitionslücken $x_1 = 3$ und $x_2 = -2$

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x}{x^3 - x^2 - 6x} = \frac{0}{0}$$

Durch Polynomdivision folgt:

$$x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x : (x^3 - x^2 - 6x) = x + 2$$

$$f(x) = x + 2 \quad (\text{der selbe Ausdruck wie oben})$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} x + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3} x + 2 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow -2} x + 2 = 0 \end{array} \right\}$$

Die Funktion lässt sich um den Def-Lücken $-2, 0, 3$ als stetig erklären und ergänzen

49) b)

$$f(x) = \frac{|x+4|}{x^2+7x+12}$$

Man untersucht, ob und wo Definitionslücken existieren

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - 12}$$

$$= -\frac{7}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = -3$$

— für die Lücke $x_2 = -3$ ergibt sich:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+4}{x^2+7x+12}$$

Zähler geht gegen 1
Nenner gegen null

es existiert kein Grenzwert, da $\frac{*}{0}$ nicht definiert ist.

— für die Lücke $x = -4$ ergibt sich:

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{x^2+7x+12}$$

Zähler geht gegen null
Nenner gegen null

Durch Faktorzerlegung (Polynomdivision)
erhält man

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{(-1)(x+4)}{(x+4)(x+3)}$$

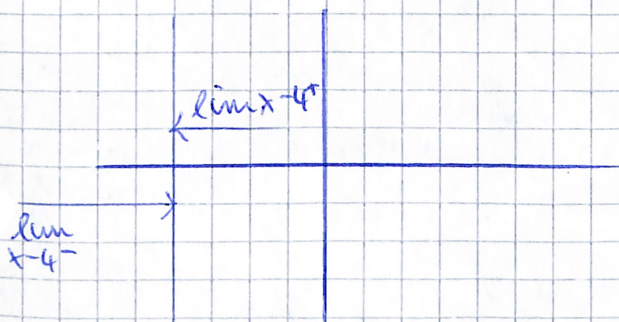
Nicht durch den Betrag kürzen

Fallunterscheidung:

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x+4}{(x+4)(x+3)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{(-1)(x+4)}{(x+4)(x+3)} = -1$$

Es existiert also eine Sprungstelle mit der Sprunghöhe 2. Deshalb keine stetige Funktion



Zum Verständnis:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{0}{0}$$

Jedoch geht der Zähler anteilig gegen 3, der Nenner anteilig gegen 2 also $\frac{3}{2}$

50)

$$f_a(x) = \begin{cases} 13x - a & \text{für } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

1 1 5

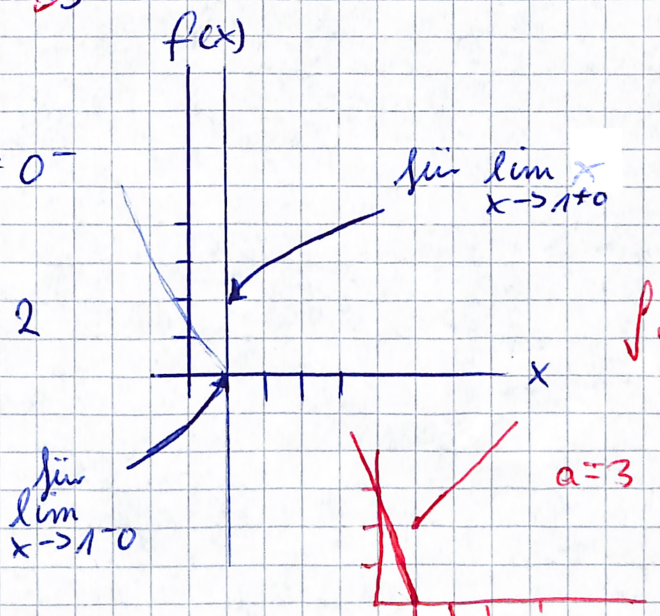
$$\mathbb{D} f_a(x) := \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}$$

aber unvollständig

für $a=3$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-0} 3x - 3 = 0^-$$

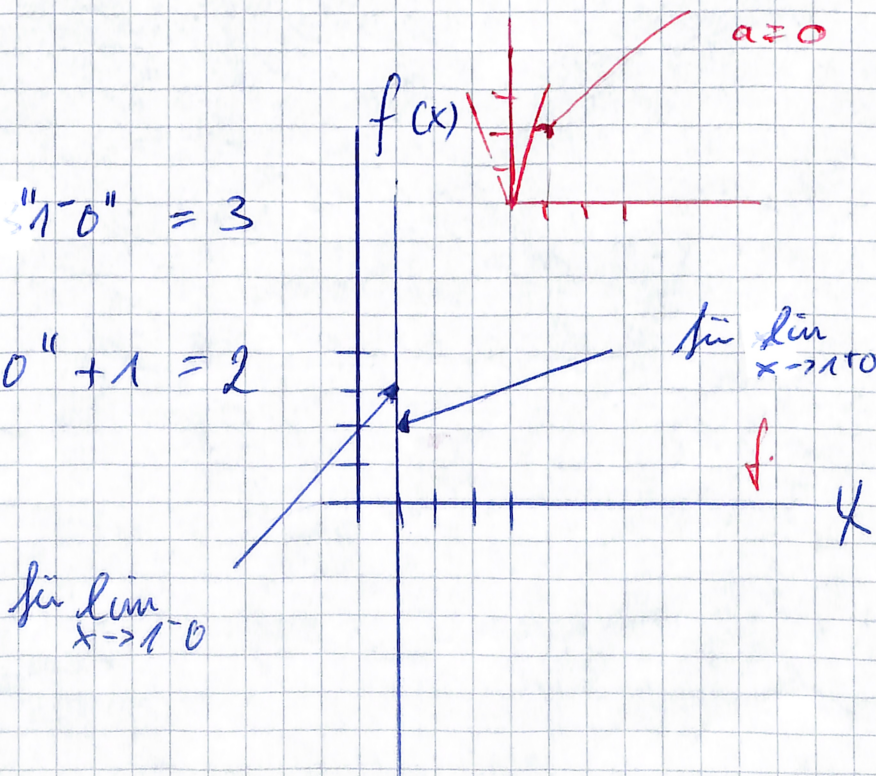
$$\lim_{x \rightarrow 1^+0} x + 1 = 2$$



für $a=0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-0} 3 \cdot "1-0" = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+0} "1-0" + 1 = 2$$



Wegen ~~den~~ beiden Sprünge ist $f_a(x)$ nicht stetig!

Aufgabe 50

- für jedes beliebig kleine a gilt: $f(a)$ ist stetig
- für $x < 1$ lineare Funktionen sind stetig
Betragfunktionen sind stetig
- bei der Verkettung einer stetigen Funktion entsteht eine stetige Funktion
- für jedes x_0 kleiner 1 ist $f(a)$ stetig als Verkettung von linearer und Betragfunktion

Bemerkung

Definitionslücken sind "Löcher" Lücken auf der x -Achse, nicht Löcher im Graphen.



- für x_0 grösser 1 ist die Funktion stetig
- für $x_0 = 1$ Die Stetigkeit an x_0 ist die Übereinstimmung von Grenzwert und Funktionswert

$$f(1) = |3 - a|$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = |3 - a|$$

Stetigkeit an $x_0 = 1$

$$2 = |3-a| \Leftrightarrow 3-a=2 \wedge 3-a=-2$$

$$a=1 \wedge a=5$$

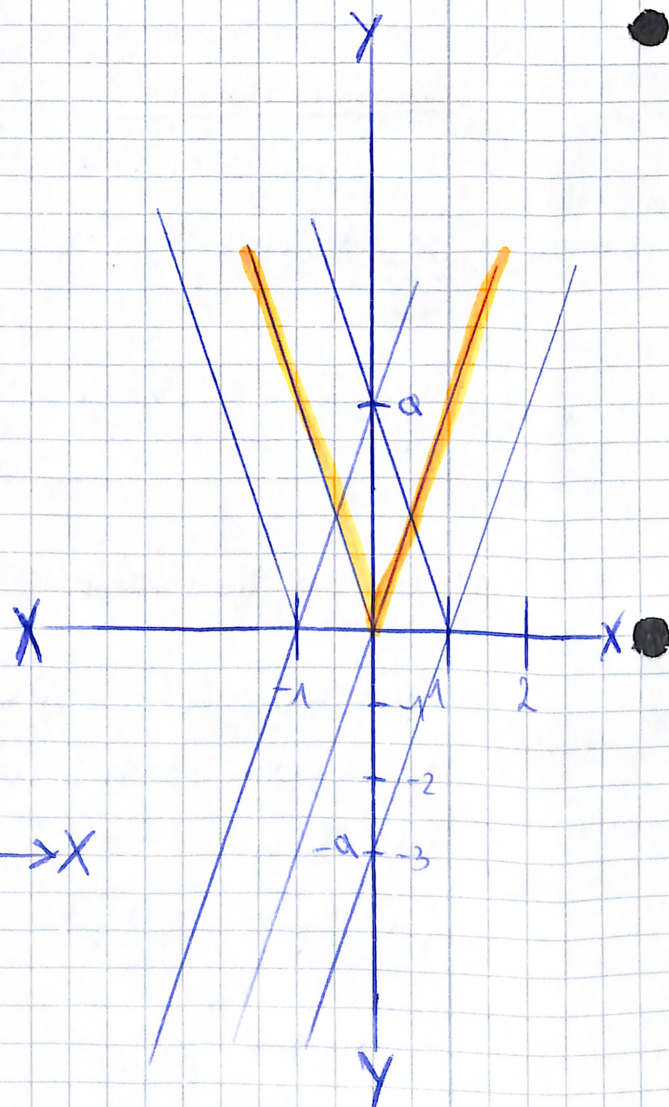
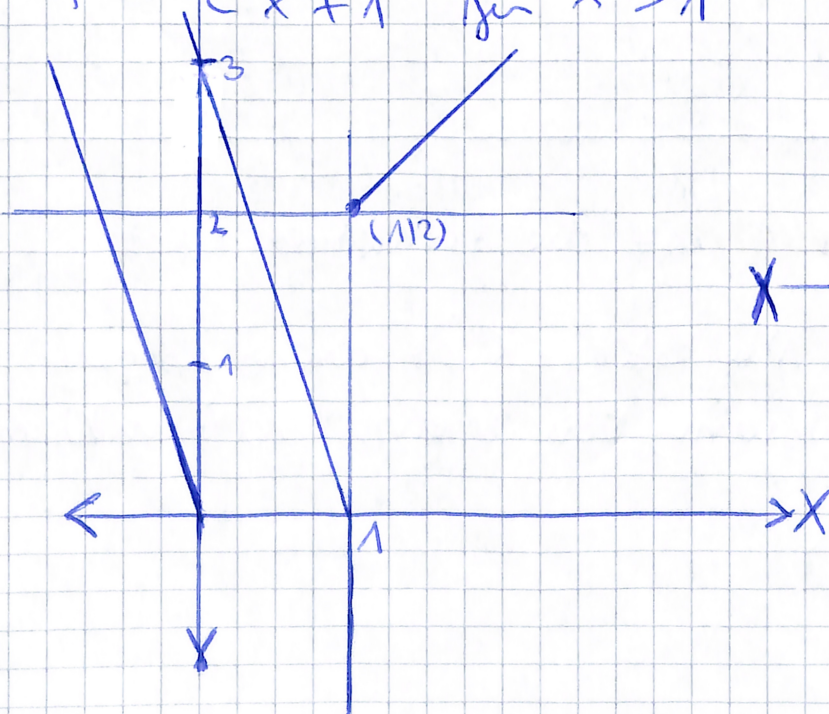
Wenn $a=1 \wedge a=5 \rightarrow$ überall stetig

Wenn $a \neq 1 \wedge a \neq 5 \rightarrow$ im Definitionsbereich unstetig.

Zeichnung des Graphen

$$f_0(x) \begin{cases} |3x| & \text{für } x \leq 1 \\ x+1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) \begin{cases} 3x-3 & \text{für } x \leq 1 \\ x+1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$



Die Funktion $f_a(x) = \begin{cases} |3x-a| & \text{für } x \leq 1 \\ x+1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$ ist

wegen $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$

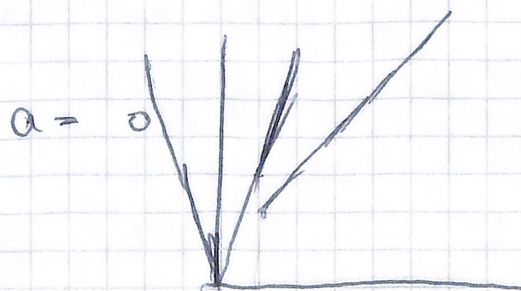
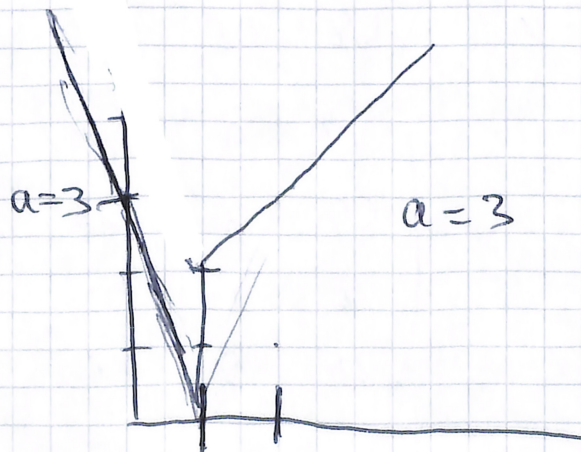
Je nach Annäherung an x_0 r. od. l. erh.
man verschiedene Steigungen

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{1+\Delta x+1-2}{\Delta x} = 1$$

$$\frac{2+1-2}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{3(1+\Delta x)-a-2}{\Delta x} = \frac{3+a}{\Delta x}$$

$$\frac{3+3\Delta x-3}{\Delta x} = 3$$



$$\begin{pmatrix} 1 & -29 & -14 & -39 \\ 5 & -4 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 25 & 10 & 39 \\ 5 & -4 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 17 \\ 4 & 25 & 10 & 39 \\ 5 & -4 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$0 - 1 - 0 = 20$
 $27 - 14 - 42 = 3 - 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 11 & 6 & 11 \\ 4 & 25 & 10 & 39 \\ 5 & -4 & -4 & 3 \\ 4 & 25 & 10 & 39 \end{pmatrix}$$

$1.2(-3)$
 $1. - 3. = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 11 & 6 & 11 \\ 4 & 25 & 10 & 39 \\ 5 & -4 & -4 & 3 \\ 4 & 25 & 10 & 39 \end{pmatrix}$$

$1. - 2.$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 14 \\ 5 & -4 & -4 & 3 \\ 4 & 25 & 10 & 39 \\ -10 & -39 & -14 & -39 \end{pmatrix}$$

$3 = 5 + 3 = 3$
 27

$72 - 39$
 42
 11

$$\begin{array}{rcl}
 P_1 & 7y - 8x & = 1 \\
 P_2 & 7y + 4x & = 25 \\
 \hline
 & 12x & = 24 \\
 & x & = 2 \\
 & y & = \frac{17}{7} \\
 & (2 \mid \frac{17}{7}) &
 \end{array}$$

$$|P_1 - P_2|$$

$$\begin{array}{rcl}
 7y - 8x & = & 1 \\
 y & = & 7 \\
 x & = & 6
 \end{array}$$

$$P_2 (6 \mid 7)$$

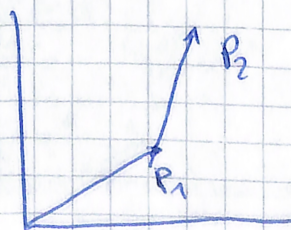
Jeder Punkt der Verbindungsstrecke von $P_1 - P_2$ einsch. Endpunkte ist LSC

$$L = \{ (x, \frac{1}{7} + \frac{8}{7}x) \mid 2 \leq x \leq 6 \}$$

Gleichung ③

Nach y auflösen

$$L = \{ (2, \frac{17}{7}) + \lambda (4, \frac{32}{7}) \mid 0 \leq \lambda \leq 1 \}$$



46) ① $x \geq 0$

② $x \geq 0$

③ $7y - 8x - 1 \leq 0$ $(0, \frac{1}{7})$ $(\frac{1}{8}, 0)$

x Achse heißt $y=0$

y Achse heißt $x=0$

$y=0$ setzen

$$8x \leq -1$$

$$x \leq -\frac{1}{8}$$

$x=0$ setzen

$$7y \leq 1$$

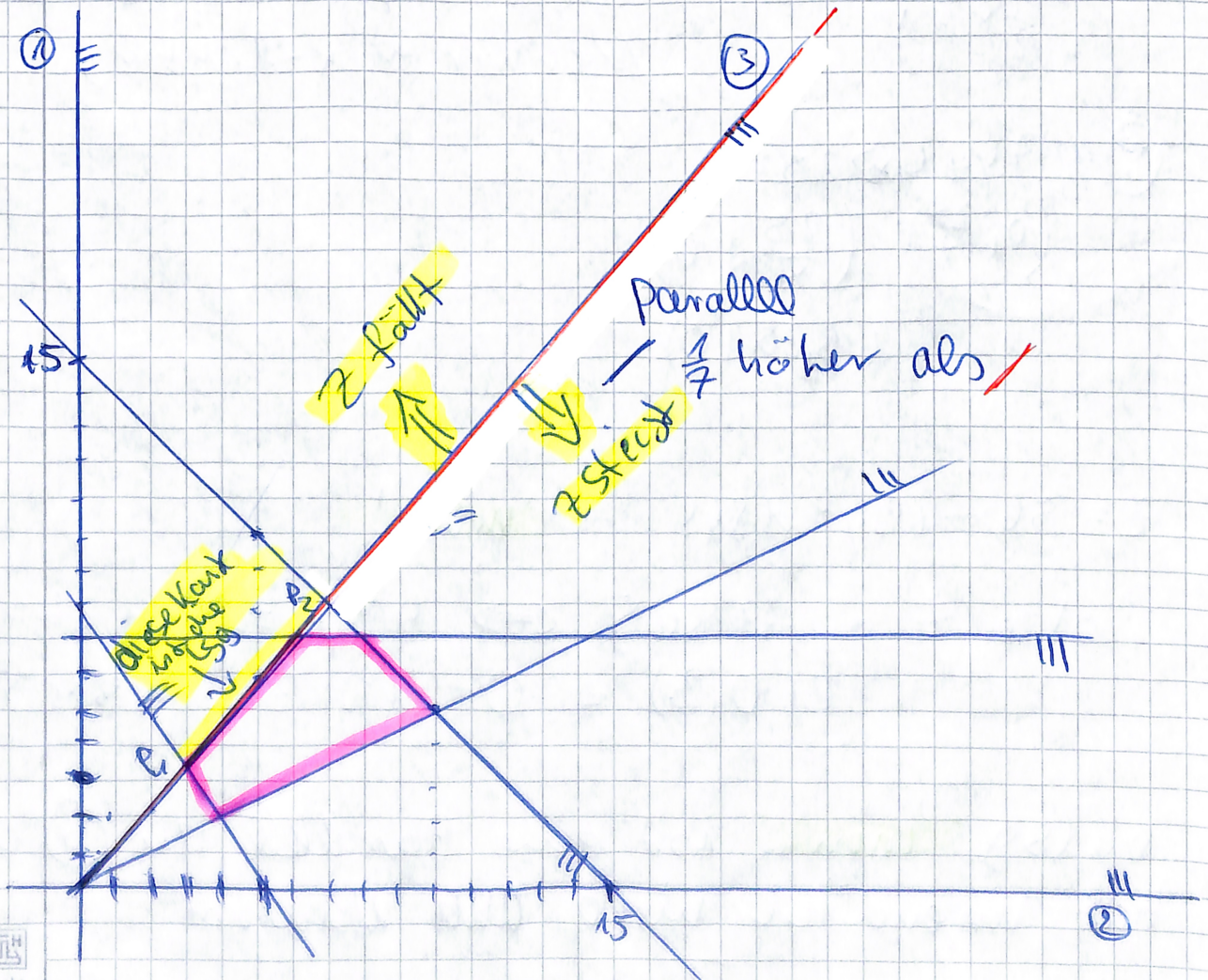
$$y \leq \frac{1}{7}$$

Zur besseren zeichnerischen Bestimmung der Geraden ③

$x=5$ wählen

$$(5, \frac{41}{7})$$

$$x=0 \quad y=1: 7-1 \leq 0$$



$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad x+y+45 &\leq 0 \\ x &\leq -45 \quad (-45 \mid 0) \\ y &\leq -45 \quad (0 \mid -45) \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist mit $\textcircled{1}$ u. $\textcircled{2}$ bestimmt

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad 7-y &\geq 0 \\ 7 &\geq y \end{aligned}$$

$$\textcircled{6} \quad x+y \leq 15$$

$$\begin{aligned} x=10 & \quad \text{und damit } y=5 \\ y=5 & \quad \text{und damit } x=10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \quad x &\leq 2y \\ \frac{1}{2}x &\leq y \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Zähler in } y\text{-Richtung} \\ \text{Nenner in } x\text{-Richtung} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{8} \quad 7y+4x &\geq 25 \\ (0, \frac{25}{7}) & \quad (\frac{25}{4} \mid 0) \\ (6,25 \mid 0) & \end{aligned}$$

$$Z = 56x - 49y - 1845 \rightarrow \text{min!}$$

$$\begin{aligned} \text{Setze } Z &= -1845 \Leftrightarrow 49y = 56x \Leftrightarrow y = \frac{8}{7}x \\ Z(0,3) &= 0 - 49 \cdot 3 - 1845 < -1845 \end{aligned}$$

Die Lsg **min** ist eine Parallele zu $\textcircled{3}$ und hat unendlich viele ~~also~~ Minima

48)

$$\lim_{x \rightarrow -a-0} \frac{x^3 + a^3}{|x+a|}$$

$x = -a$ einsehen

↓ Durch Polynomdivision festlegen

$$= \lim_{x \rightarrow -a-0} \frac{\cancel{(x+a)}(x^2 - ax + a^2)}{\cancel{-(x+a)}} = \lim_{x \rightarrow -a-0} (x^2 - ax + a^2)$$

für $x = -a$ einsetzen

$$\lim_{x \rightarrow -a-0} -(x^2 - ax + a^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -a-0} -(+a^2 + a^2 + a^2) = -3a^2$$

$$\begin{array}{r} x^3 + a^3 : (x+a) = x^2 - ax + a^2 \\ x^3 + ax^2 \\ \hline -ax^2 - a^2x \\ -ax^2 - a^2x \\ \hline a^2x + a^3 \\ a^2x + a^3 \\ \hline = \end{array}$$

50)

$$f_a(x) = \begin{cases} 13x - a & \text{für } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 13 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2$$

} - für Stetigkeit

47)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-5}{x} = -\infty$$

existiert nicht, auch kein unendlich

50)

- für jedes beliebige a gilt
reelle a

f_a ist stetig in Stelle x_0
größer 1 als lin Funktion

Stellen x_0 kleiner 1

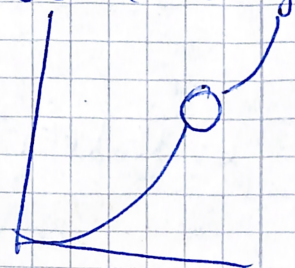
für $x \in \mathbb{R}$

lineare Funktionen
sind stetig
Bezugsfunktionen
sind stetig

bei der Verkettung einer stetigen
Funktion entsteht eine stetige
Funktion

für jedes x_0 kleiner 1 ist
 f_a stetig als Verkettung von
 lin und Betragfunktion also
 als Verkettung von stetigen
 Funktionen

Definit auslöchen (Loch auf
 der x -Achse nicht



für $x_0 = 1$

Die Stetigkeit an x_0 ist die Überein-
 stimmung von Grenzwert und
 Funktionswert

$$f(1) = |3 \cdot 1 - a|$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} = |3 - a|$$

Stetigkeit an $x_0 = 1$

$$2 = |3 - a| \Leftrightarrow 3 - a = 2 \vee 3 - a = -2$$

$$1 = a \quad a = 5$$

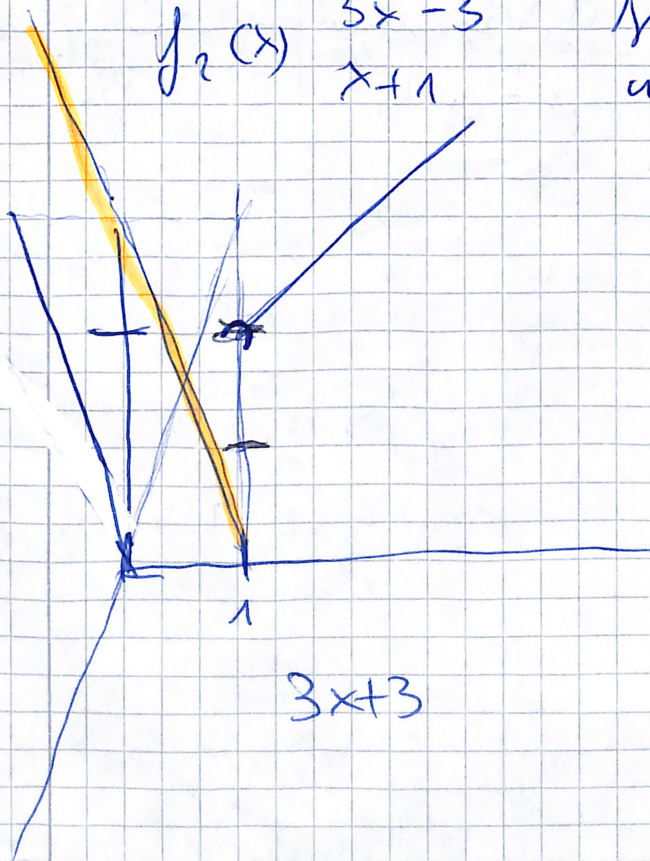
$$a = 1 \vee a = 5$$

Wenn $a = 1 \vee a = 5 \rightarrow$ Überall stetig
 Wenn $a \neq 1 \vee a \neq 5 \rightarrow$ in Def Bereich unstetig

Zeichnung des Graphen

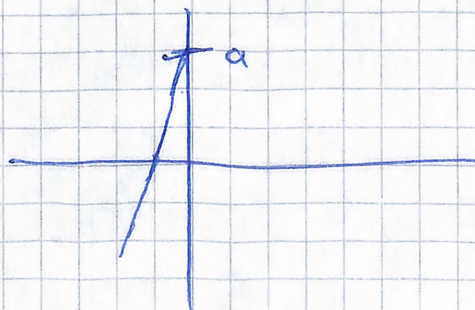
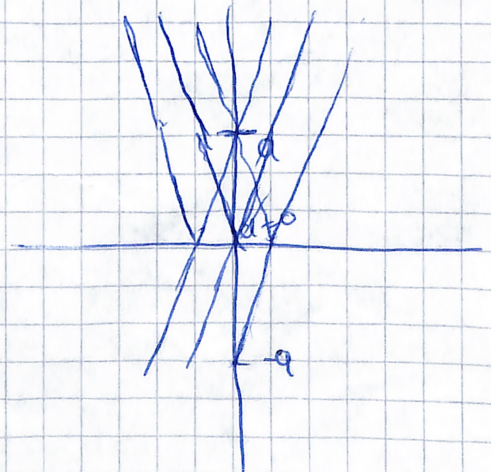
$$f_0(x) \begin{cases} 13x & \text{für } x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) \begin{cases} 3x-3 & \text{für } x \leq 1 \\ a & x > 1 \end{cases}$$



$$3x+3$$

$$|3x-a|$$



(48)

$$\lim_{x \rightarrow -a-0} \frac{x^3 + a^3}{|x+a|} = \lim_{x \rightarrow -a-0} \frac{1 \cdot \cancel{(x+a)} (x^2 - ax + a^2)}{\cancel{-(x+a)} \cdot 1} = -3a^2$$



$$\lim_{x \rightarrow -a+0} \frac{1 \cdot (x+a) (x^2 - ax + a^2)}{\cancel{+(x+a)}} = 3a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^3 + x^2}{|x+a|}$$

{ existiert nicht
auch kein uneigentliches
Grenzwert $= 0$ für
 $a=0$

(49)

48

$$\lim_{x \rightarrow -a} \frac{|x^3 + a^3|}{x + a}$$

Fallunterscheidung

$$1) \quad x^3 + a^3 \quad x > -a \Leftrightarrow x^3 + a^3 > -a$$

$$\lim_{x \rightarrow -a+0} \frac{x^3 + a^3}{x + a}$$

Durch Polynomdivision folgt

$$x^3 + a^3 : x + a = x^2 - ax + a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -a+0} x^2 - ax + a^2 = 3a$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow -a-0} -1 \left(\frac{x^3 + a^3}{x + a} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -a-0} -1 (x^2 - ax + a^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -a-0} -x^2 + ax - a^2 = -3a^2$$