

Übungen zur Höheren Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I
WS 2000/01

51. a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ wird definiert: $[x] :=$ größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.
Man skizziere den Graphen der Funktion, gegeben durch
- $$f(x) = 1,5 + [x] - x.$$
- b) Man skizziere den Graphen der Funktion f , gegeben durch $f(x) = \left| -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 \right|$.
52. Gegeben sei $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{3x-4}{2x-7}$. Man bestimme $f'(-3)$ durch Aufstellung des Differenzenquotienten und anschließenden Grenzübergang.
53. Man differenziere:
- $$f(x) = 3x^3 e^{-x^2} \quad ; \quad g(y) = \sqrt{\frac{2 + \sin y}{1 - \cos y}} \quad ; \quad h(x) = \lg(\cos 2x) - \cos(\lg 2x) + \lg 2 \quad ;$$
- $$f(x) = \frac{16}{\sqrt{(5x^4 + 20x^2 + 16)^3}}.$$
54. Man differenziere:
- Produktregel
Kettenregel
- $$f(x) = (x+1)^{(2+\cos x)} \quad ; \quad f(x) = \cos(4x^2 + 1) \cdot 2^{\frac{1}{2}x} \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^2.$$
55. Es sei $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1} \quad (x \neq \frac{1}{2})$. Man stelle eine Vermutung betreffend der n -ten Ableitung $f^{(n)}(x)$ auf und beweise sie durch vollständige Induktion.

Abgabe:

bis spätestens **Montag, 15.1.01, 14.00 Uhr** im Postfach „Höhere Mathematik für Wirtschafts-
wissenschaftler“ im Raum H-C 5326 (AVZ, Ebene 5); **nicht** Postfach Prof. Dr. Fröhlich!

Bitte vermerken sie neben ihrem **Namen** auch ihre **Gruppenzugehörigkeit** bzw. **-nummer!!!** Danke!!!

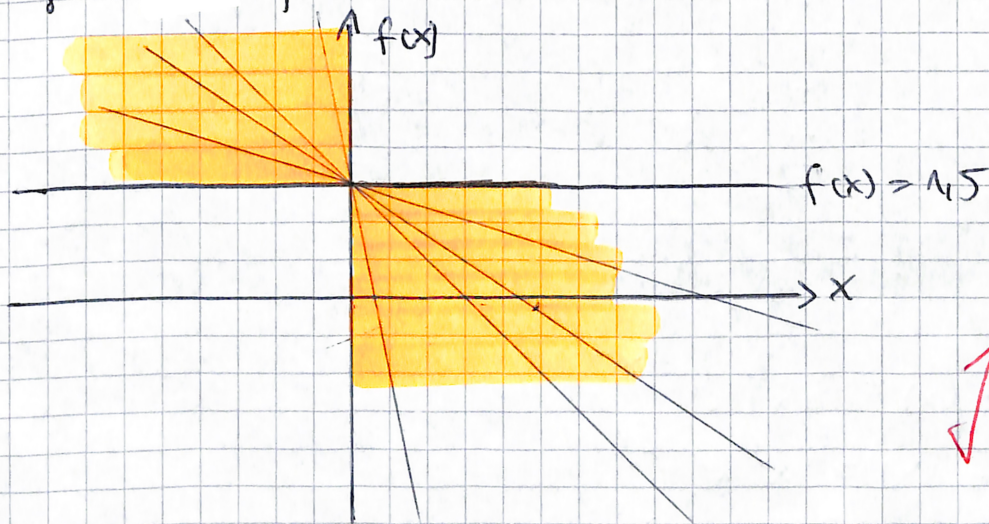
Aufgabe 5.1

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ wird definiert: $[x] :=$ größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Nun skizziere den Graphen der Funktion, gegeben durch

$$f(x) = 1.5 + [x] - x$$

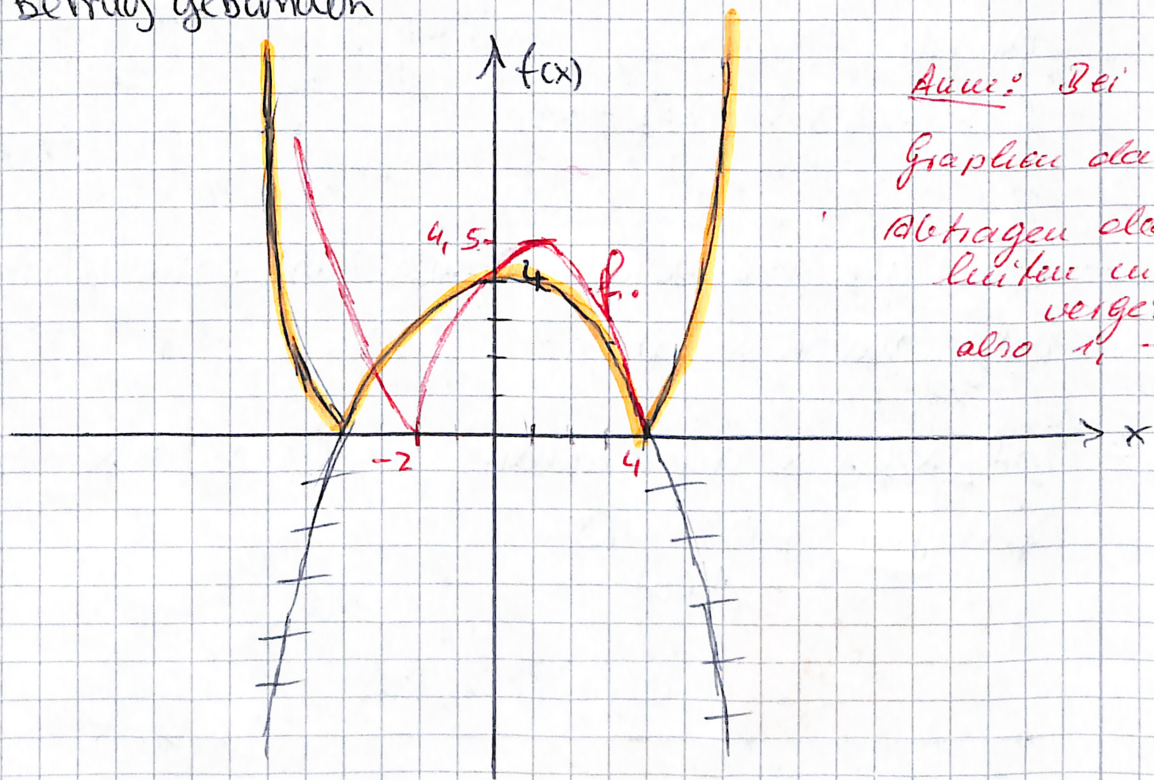
- $[x]$ als größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.
- ist $[x] \wedge x$ ganzzahlig und $[x] = x$, dann gilt $f(x) = 1.5$



In Abhängigkeit von " x " können unendlich viele Geraden durch den markierten Bereich laufen

b) Man skizziere den Graphen der Funktion f ,
gegeben durch $f(x) = \left| -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 \right|$

- $f(x)$ ist in jedem Falle positiv, da durch den Betrag gebunden



Achtung: Bei
Graphen das
Abtragen der Ein-
heiten nicht
vergessen,
also 1, -1, usw.

53)

a) $f(x) = 3x^3 e^{-x^2}$

$$f'(x) = 9x^2 e^{-x^2}$$

$$f''(x) = 18x e^{-x^2}$$

$$f'''(x) = 18 e^{-x^2}$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$

da $0 \cdot e^{-x^2} = 0$

b) $g(y) = \sqrt{\frac{2 + \sin y}{1 - \cos y}}$

$$= \left(\frac{2 + \sin y}{1 - \cos y} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(2 + \sin y)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \cos y)^{\frac{1}{2}}}$$

Anwendung der
Quotientenregel

$$= \frac{\frac{1}{2} (2 + \sin y)^{-\frac{1}{2}} (1 - \cos y)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (1 - \cos y)^{-\frac{1}{2}} (2 + \sin y)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \cos y)^2}$$

c) $h(x) = \log(\cos 2x) - \cos(\log 2x) + \log 2$

$$h'(x) = \frac{1}{\cos 2x} + \sin(\log 2x) \quad | \rightarrow \log 2 \text{ fällt weg da konstant}$$

d) $f(x) = \frac{16}{\sqrt{(5x^4 + 20x^2 + 16)^3}}$

$$f(x) = 16 (5x^4 + 20x^2 + 16)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2} \cdot 16 (5x^4 + 20x^2 + 16)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{24}{\sqrt{(5x^4 + 20x^2 + 16)^5}}$$

$$f''(x) = +\frac{60}{\sqrt{(5x^4 + 20x^2 + 16)^7}}$$

54)

a) $f(x) = (x+1)(2+\cos x)$

$$f'(x) = (2 + \cos x)(x+1)' (1 + \cos x)$$

$$f''(x) = (1 + \cos x)(2 + \cos x)(x+1)' \cos x$$

$$b) \quad f(x) = \cos(4x^2 + 1) \cdot 2^{\frac{1}{2}x} \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^2$$

- Anwendung der Produktregel -

$$f'(x) = -\sin(4x^2 + 1) \cdot 2^{\frac{1}{2}x} \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \\ \cos(4x^2 + 1) \cdot x^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \\ \cos(4x^2 + 1) \cdot 2^{\frac{1}{2}x} \cdot x \quad f.$$

$$55) \quad f(x) = \frac{2x+1}{2x-1} \quad x \neq \frac{1}{2}$$

gefragt ist nach der n-ten Ableitung
 $f^{(n)}(x)$

zu Beginn ein paar Ableitungen bilden, dann wird deutlicher,

Beweis durch vollständige Induktion

*wie die Regel
 liefert
 ist.*

I Induktionsanfang

$f(n) \quad (w) \quad \text{bei } n \in \mathbb{N}$

$$f(1) = \frac{2+1}{2-1} = 3$$

II Induktionsschritt

$\exists \exists. \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (f(n) \Rightarrow f(n+1)) \quad f(n) \text{ sei fest}$

a) Induktionsvoraussetzung

$f(n) \quad (w)$

$$\text{d.h.} \quad f(n) = \frac{n2^n + 1}{n2^n - 1} = 4 \quad (w)$$

b) Induktionsbehauptung

$$\text{d.h. } f(n) = \frac{(n-1)2^{n-1} + 1}{(n-1)2^{n-1} - 1} = 4 \quad (\text{w})$$

c) Beweisen

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{(n-1)2^{n-1} + 1}{(n-1)2^{n-1} - 1} \\ &= \frac{2n^{n-1} - 2^{n-1} + 1}{2n^{n-1} - 2^{n-1} - 1} \\ &= \frac{2n^n \cdot 2^{n-1} - 2n^n \cdot 2^{n-1} + 1}{2n^n \cdot 2^{n-1} - 2n^n \cdot 2^{n-1} - 1} \end{aligned}$$

nach Vor. qed.

53)

$$f'(x) = \frac{16}{\sqrt{(5x^4 + 20x^2 + 16)^3}}$$

$$= 16 \cdot (5x^4 + 20x^2 + 16)^{-\frac{3}{2}}$$

nach Kettenregel

$$f'(x) = 16 \cdot (20x^3 + 40x) \left(-\frac{3}{2}\right) (5x^4 + 20x^2 + 16)^{-\frac{5}{2}}$$

Wurzel aus

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

54a)

$$f(x) = (x+1)^{(2+\cos x)} \left(\ln(-) \right) (x^a)' = a \cdot x^{a-1}$$

$$a^x = a^x \ln a$$

Wenn ein Anteil im Exponent konstant ist $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$ anzuwenden.

Vordem Ableiten die Funktion umschreiben

$$\log a^b = b \log a$$

Dann muss die gesamte Funktion logarithmiert werden

$$\ln f(x) = (2 + \cos x) \ln(x+1)$$

$$\frac{d}{dx} ()$$

$$f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = -\sin x \cdot \ln(x+1) + (2+\cos x) \left(\frac{1}{x+1} + 1 \right)$$

mit $f(x)$ multiplizieren

Produktregel
Kettenregel

$$f'(x) = (x+1)^{(2+\cos x)} \left[-\sin x \cdot \ln(x+1) + \frac{2+\cos x}{x+1} \right]$$

$f(x)$

$$7 = 10^{\lg 7}$$

$$x+3 = 5^{\log(x+3)}$$

$$x+1 = e^{\ln(x+1)}$$

$$f(x) = \left(e^{\ln(x+1)} \right)^{2+\cos x} = e^{\ln(x+1)(2+\cos x)}$$

$$f(x) = u(x)^{v(x)}$$

$$\ln f(x) = v(x) \ln u(x)$$

$$f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\left(u(x)^{v(x)} \right)' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right]$$

auf die Formelsammlung

Zur Aufgabe 54

$$\begin{aligned}(x+1)^{(2+\cos x)} &= (e^{\ln(x+1)})^{2+\cos x} \\ &= e^{\ln(x+1) \cdot (2+\cos x)}\end{aligned}$$

und dann nach Kettenregel auflösen

Allgem.!

$$\begin{aligned}f(x) &= u(x)^{v(x)} \\ \ln(f(x)) &= u(x) \cdot \ln v(x)\end{aligned}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x) \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f'(x) = u'(x)^{v(x)} \cdot \left[v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right]$$

55

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1} \quad x \neq \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1) \cdot 2 - (2x+1) \cdot 2}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{-4}{(2x-1)^2}$$

$$= -4(2x-1)^{-2}$$

$$f''(x) = (-4)(-2) \cdot (2x-1)^{-3} \cdot 2$$

$$f'''(x) = (-4)(-2) \cdot 2 \cdot (-3) (2x-1)^{-4} \cdot 2$$

$$= (-4) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot 2^2 (2x-1)^{-4}$$

Quotientenregel
nur wenn Zähler und
Nenner von x abhängen

$$f^{IV} = (-4)(-2)(-3) 2^2 (-4) (2x-1)^{-5} \cdot 2$$

$$= (-4)(-2)(-3) 2^2 (2x-1)^{-5}$$

Man stellt die Vermutung auf

$$\triangle_{n \in \mathbb{N}} f^{(n)}(x) = (-4)(-1)^{n-1} \cdot n! 2^{n-1} (2x-1)^{-n-1}$$

$$= (-1)^n 2^{n+1} n! (2x-1)^{-n-1}$$

$$0,5x^2 - 2x + 1$$

$$x - 2 \geq$$

Man untersucht auf Monotonie

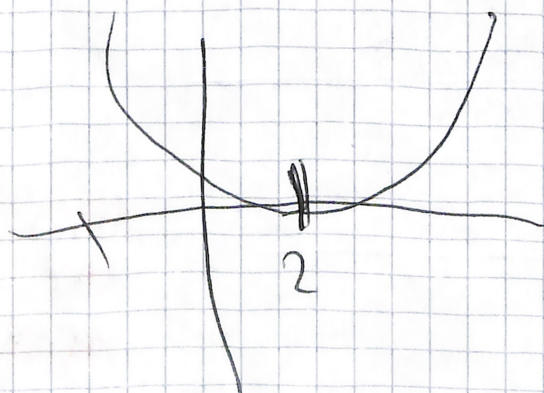
$$f'(x) > 0 \quad x - 2 > 0$$

$$x > 2$$

$$f'(x) < 0 \quad x - 2 < 0$$

$$x < 2$$

für $x < 2$ ist f monoton fallend
 für $x > 2$ ist f monoton wachsend



Nr. 52 ✓

$$f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \frac{3x-4}{2x-7}$$

$$m(h, -3) = \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$$

Sofort alle Werte einsetzen

$$= \frac{\frac{9+3h-4}{6+2h-7} - \frac{-13}{-13}}{\frac{h}{1}}$$

($h \neq 0$)

so umformen dass man mit h kürzen kann

$$= \frac{\frac{-13+3h+13-2h}{-13+2h}}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}^1}{(-13+2h) \cancel{h}}$$

$$= \frac{1}{-13+2h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{1}{-13}$$

$$\frac{+h}{-13+2h}$$

h

1

$$\frac{\cancel{+h}}{-13+2h} \cdot \frac{1}{\cancel{h}}$$

53 Man differenziere ✓

$$g(y) = \sqrt{\frac{2 + \sin y}{1 - \cos y}}$$

$$= \left(\frac{2 + \sin y}{1 - \cos y} \right)^{\frac{1}{2}}$$

→ das hoch $\frac{1}{2}$ nicht
beachten, später dazu rechnen
nach Kettenregel

und Quotientenregel

$$= \frac{(1 - \cos y) \cos y - (2 + \sin y) \sin y}{(1 - \cos y)^2}$$

$$= \frac{\cos y \cos^2 y - 2 \sin y - \sin^2 y}{(1 - \cos y)^2}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$-\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

$$= \frac{\cos y - 2 \sin y - 1}{(1 - \cos y)^2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos y}{2 + \sin y}}$$

54 $f(x) = (x+1)^{(2+\cos x)}$

$$(x^d)' = d x^{d-1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$\log_a b = b \log a$$

Exponent
Konst
Basis
Konst

$$\ln f(x) = (2 + \cos x) \ln(x+1)$$

$$f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = -\sin x \ln(x+1) + (2 + \cos x) \cdot 1 \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = (x+1)^{(2+\cos x)} \left[-\sin x \ln(x+1) + \frac{2+\cos x}{x+1} \right]$$

51)

$$[5,8] = 5$$

man benötigt die größte
oder kleinste ganze Zahl kleiner
gleich 5,8

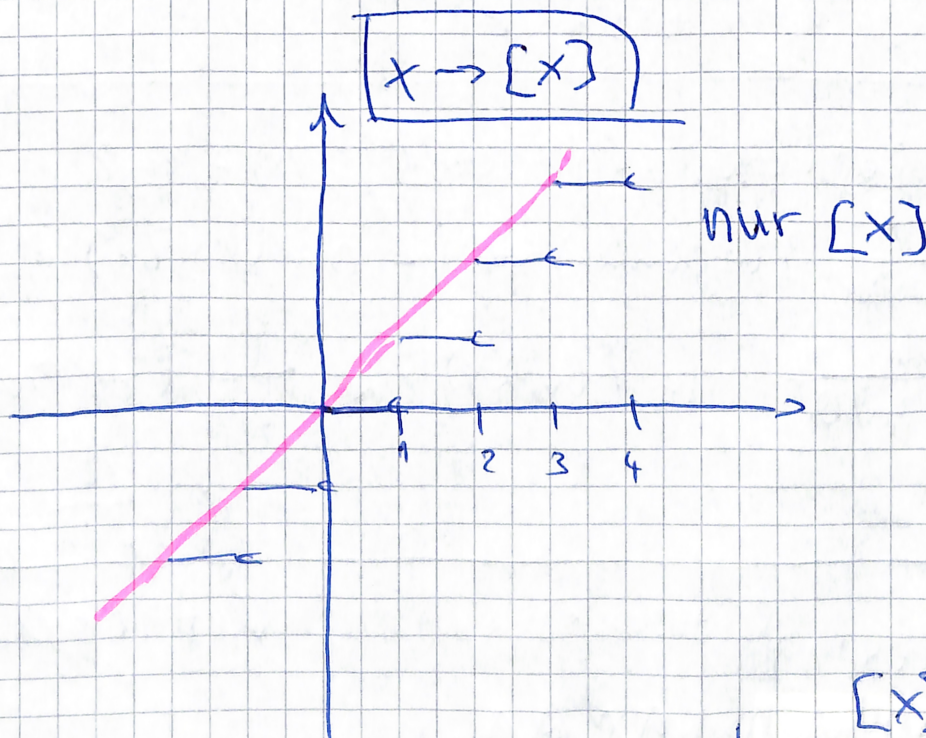
$$[5,3] = 5$$

$$[5] = 5$$

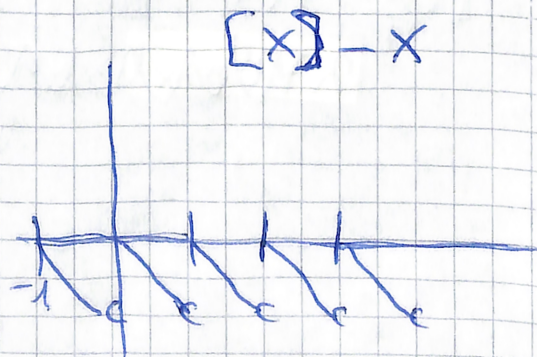
$$[0,3] = 0$$

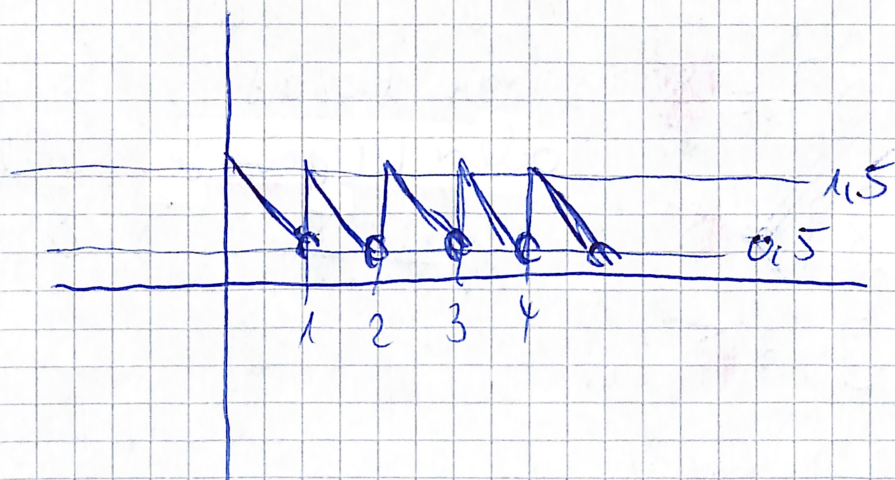
$$[-1,3] = -2$$

$$f(x) = 1,5 + [x] - x$$



$$x \rightarrow [x] - x$$





$$\begin{aligned}
 & 3x^3 e^{-x^2} && u' \cdot v + u \cdot v' \\
 & 9x^2 \cdot e^{-x^2} + 3x^3 \cdot (-2x e^{-x^2}) \\
 & 9x^2 \cdot e^{-x^2} - 6x^4 e^{-x^2}
 \end{aligned}$$

$$h(x) = \lg(\cos 2x) - \cos(\lg 2x) + \lg 2$$

$$\frac{1}{\cos 2x} \cdot (-\sin 2x) - (-\sin(\lg 2x) \cdot \frac{1}{2x})$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\cos 2x \ln 10} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 - (-\sin(\lg 2x)) \cdot \frac{1}{2x \ln 10} \cdot 2
 \end{aligned}$$

$$f(x) = (x+1)^{2 + \cos x}$$

Kettenregel

~~by hand~~

Kettenregel:

äußere $\times$ mittlere $\times$ innere

$$f(x) = 11 + (h(h(x^2 - 1)))^2$$

$$f'(x) = 2(h(h(x^2 - 1))) \cdot h'(h(x^2 - 1)) \cdot h'(x^2 - 1) \cdot 2x$$

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + \frac{73}{4}}{x^2 + 12x + 37} \quad \frac{u' \cdot v + u \cdot v'}{(v)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x + 1)(x^2 + 12x + 37) - (x^3 + x^2 + x + \frac{73}{4}) \cdot 2x}{(v)^2}$$

$$f(x) = e^{-\sin(x^3 + 5y)}$$

$$f'(x) = e^{-\sin(x^3 + 5y)} (-\cos(x^3 + 5y)) (3x^2 + 5y)$$

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{2} \cos(e^{-x^2})\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(1 + \frac{1}{2} \cos(e^{-x^2}))} \cdot \left(-\frac{1}{2} \sin(e^{-x^2}) (-2x e^{-x^2})\right)$$

$$f(x) = \frac{7e^x \cdot 3 \sin x}{4x^7} \quad \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Kettenregel

$$f'(x) = \frac{(7e^x \cdot 3 \cos x \cdot 4x^7) - (7e^x \cdot 3 \sin x) \cdot (28x^6)}{16x^9}$$

$$f'(x) = \frac{((7e^x \cdot 3 \sin x) + (7e^x \cdot 3 \cos x))4x^7 - (7e^x \cdot 3 \sin x) 28x^6}{16x^9}$$

$$= \frac{7e^x [(3 \sin x + 3 \cos x) 4x^7 - (3 \sin x) 28x^6]}{(4x^7)^2}$$

$$= \frac{27e^x 4x^6 [(\sin x + \cos x) x - \sin x \cdot 7]}{16x^{14}}$$

$$= \frac{27e^x [(\sin x + \cos x) x - 7 \sin x]}{4x^8}$$

$$f(x) = \frac{x^4 - 6x^3 - 27x^2 - 216x - 326}{x^3 - x^2 - 24x - 36}$$

Nullstellen

$$x^3 - x^2 - 24x - 36 = 0$$

$$x^3 - x^2 - 24x = 36$$

$$(x+2)(x) ()$$

Polynomdivision

$$x^3 - x^2 - 24x - 36 : (x+2) = x^2 - 3x - 16$$

P-q-Formel

$$0 = x^2 - 3x - 18$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 18}$$

$$x = 6 \quad \vee \quad x = -3$$

Somit ist

$$ID: x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 6\}$$

Überprüfen ob die NS des Nenners auch NS des Zählers sind.

Polynomdivision

$$x^4 - 6x^3 - 27x^2 - 216x - 326 : (x+3) = x^3 - 9x^2 + 18$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3 + 9x + 18}{x+2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^3 + 9(-2+h) + 18}{(-2+h)+2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^3 - 18 + 9h + 18}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{h} + 5 + h}{1}$$



Aufgabe 5.1

man benötigt die grösste ganze Zahl kleiner
gleich

$$\lfloor 5,8 \rfloor = 5$$

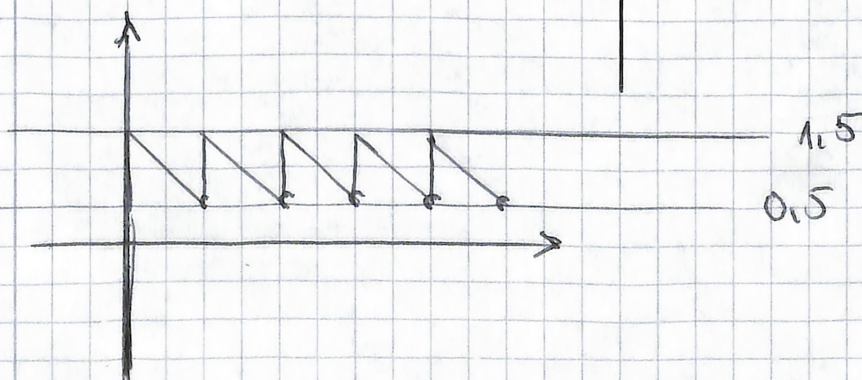
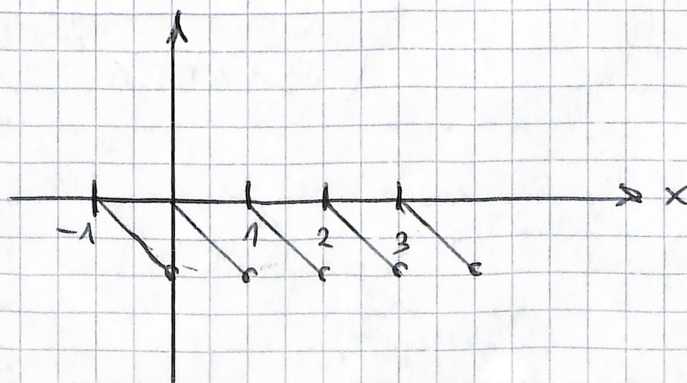
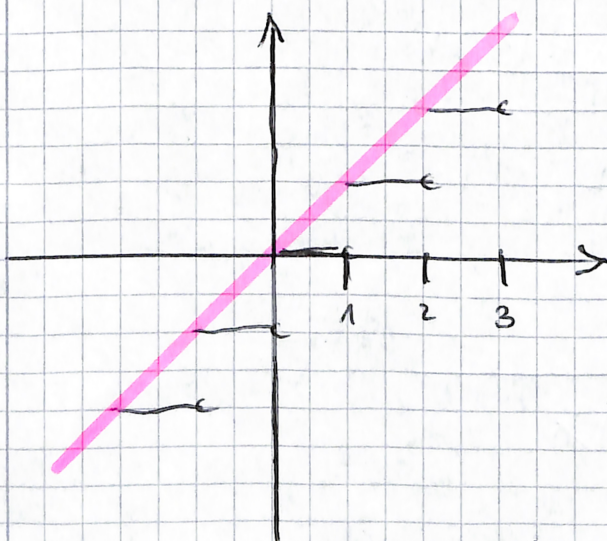
$$\lfloor 5,3 \rfloor = 5$$

$$\lfloor 5 \rfloor = 5$$

$$\lfloor 0,3 \rfloor = 0$$

$$\lfloor -1,3 \rfloor = -2$$

$$f(x) = 1,5 + \lfloor x \rfloor - x$$



Aufgabe 52

$$f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \frac{3x-4}{2x-7}$$

Sofort alle
Werte einsetzen

$$m(h, -3) = \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$$

$$= \frac{\frac{9+3h-4}{6+2h-7} - \frac{-13}{-13}}{\frac{h}{1}}$$

($h \neq 0$)

So umformen dass man mit h kürzen kann

$$= \frac{\frac{-13+3h+13-2h}{-13+2h}}{\frac{h}{1}}$$

$$= \frac{\cancel{x} 1}{(-13+2h) \cancel{x}}$$

$$= \frac{1}{-13+2h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = -\frac{1}{13}$$

Aufgabe 53 Mann differenziere

$$g(y) = \sqrt{\frac{2 + \sin y}{1 - \cos y}}$$

$$= \left(\frac{2 + \sin y}{1 - \cos y} \right)^{\frac{1}{2}}$$

→ das hoch $\frac{1}{2}$ nicht
beachten und später
dazurechnen

$$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

→ nach Kettenregel und
Quotientenregel
differenzieren

$$f(g(x)) = f'(x) \cdot g'(x)$$

$$g'(y) = \frac{(1 - \cos y) \cos y - (2 + \sin y) \sin y}{(1 - \cos y)^2}$$

$$= \frac{\cos y \cdot \cos^2 y - 2 \sin y \cdot \sin^2 y}{(1 - \cos y)^2}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ -\sin^2 x - \cos^2 x &= -1 \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos y - 2 \sin y - 1}{(1 - \cos y)^2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos y}{2 + \sin y}}$$

$$f(x) = 3x^3 e^{-x^2}$$

- Produktregel und

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9x^2 \cdot e^{-x^2} + 3x^3 \cdot (-2x e^{-x^2}) \quad \text{Kettenregel} \\ &= 9x^2 \cdot e^{-x^2} - 6x^4 e^{-x^2} \quad u' \cdot v + u \cdot v' \end{aligned}$$

$$h(x) = \log(\cos 2x) - \cos(\log 2x) + \log 2$$

$$h'(x) = \frac{1}{\cos 2x \ln 10} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 - (-\sin(\log 2x)) \cdot \frac{1}{2x \ln 10} \cdot 2$$

$$\frac{1}{2x \ln 10} \cdot 2$$

$$f(x) = \frac{16}{\sqrt{(5x^4 + 20x^2 + 16)^3}}$$

$$f'(x) = 16 \cdot (5x^4 + 20x^2 + 16)^{-\frac{3}{2}}$$

nach Kettenregel

$$= -\frac{3}{2} \cdot 16 (5x^4 + 20x^2 + 16)^{-\frac{5}{2}} (20x^3 + 40x)$$

Aufgabe 54

Nach differenzieren

$$a) f(x) = (x+1)^{(2+\cos x)} \quad | (\ln(\dots))$$

$$(x^2)' = 2 \cdot x^{2-1}$$

$$a^x = a^x \ln a$$

Wenn ein Anteil im Exponent

Konstant ist dann:

$$(x^2)' = 2 \cdot x^{2-1} \text{ anwenden}$$

Vor dem ableiten die Funktion umschreiben
(logarithmieren)

$$\log a^b = b \log a$$

$$\ln f(x) = (2 + \cos x) \ln(x+1)$$

$u' \cdot v + u \cdot v'$
 Produktregel
 Kettenregel

$$f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = -\sin x \ln(x+1) + (2 + \cos x) \frac{1}{x+1} + 1$$

mit $f(x)$
 multiplizieren

$$f'(x) = \underbrace{(x+1)^{(2+\cos x)}}_{f(x)} \left[-\sin x \cdot \ln(x+1) + (2 + \cos x) \frac{1}{x+1} + 1 \right]$$

$$7 = 10^{\lg 7}$$

$$x+3 = 5^{5 \log(x+3)}$$

$$x+1 = e^{\ln(x+1)}$$

$$f(x) = (e^{\ln(x+1)})^{2+\cos x} = e^{\ln(x+1)(2+\cos x)}$$

$$f(x) = u(x)^{v(x)}$$

$$\ln f(x) = v(x) \ln u(x)$$

$$f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$(u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right]$$

Aufgabe 54

$$(x+1)^{(2+\cos x)} = (e^{\ln(x+1)})^{2+\cos x}$$

$$= e^{\ln(x+1)(2+\cos x)}$$

$$\stackrel{+1}{=} \frac{1}{x+1} (2+\cos x) + (-\sin x) \ln(x+1)$$

Kettenregel

Aufgabe 55

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1} \quad \left[x \neq \frac{1}{2} \right]$$

$$f'(x) = \frac{-4}{(2x-1)^2}$$

$$= -4(2x-1)^{-2} *$$

$$f''(x) = (-4)(-2)(2x-1)^{-3} \cdot 2$$

$$f'''(x) = (-4)(-2)(-3)(2x-1)^{-4} \cdot 2 \cdot 2$$

$$f^{(4)}(x) = (-4)(-2)(-3)(-4)(2x-1)^{-5} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Vermutung

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f^{(n)}(x) = -4 \left[(-1)^{n-1} \right] \left[n! \right] \left[2^{n-1} \right] (2x-1)^{-n-1}$$

$$= (-1)^n \cdot 2^{n+1} \cdot n! \cdot (2x-1)^{-n-1}$$

Diagram showing the derivation of the conjecture from the first three derivatives:

- From $f'(x) = -4(2x-1)^{-2}$, the coefficient -4 is identified as $(-1)^1 \cdot 2^{1+1} \cdot 1!$.
- From $f''(x) = 8(2x-1)^{-3}$, the coefficient 8 is identified as $(-1)^2 \cdot 2^{2+1} \cdot 2!$.
- From $f'''(x) = -24(2x-1)^{-4}$, the coefficient -24 is identified as $(-1)^3 \cdot 2^{3+1} \cdot 3!$.

Beweis (induktiv)

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = (-1)^n 2^{n+1} n! (2x-1)^{-n-1} \cdot (-n-1) \cdot 2$$

$$= (-1)^{n+1} 2^{n+2} (n+1)! (2x-1)^{-(n+1)-1}$$

d.h.

B.I. (n+1) v. B.I. n

Beweis (vollst. Ind)

$$n=1 \quad f'(x) = (-1)^1 \cdot 2^2 \cdot 1! (2x-1)^{-1-1}$$

(w) Siehe

~~*~~

Ind. Annahme

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n 2^{n+1} n! (2x-1)^{-n-1}$$

Ind. Behauptung

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{(n+1)} 2^{n+2} (n+1)! (2x-1)^{-(n+1)-1}$$

Beweis

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x) \right)' = (-1)^n 2^{n+1} \cdot n! (-n-1) (2x-1)^{-n-2} \cdot 2 \\ &= (-1)^{n+1} 2^{n+2} (n+1)! (2x-1)^{-(n+1)-1} \end{aligned}$$

q.e.d.

$$n! \cdot (n+1)$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)$$

53 ✓

$$h(x) = \underbrace{\lg(\cos 2x)}_{\text{Kettenregel}} - \underbrace{\cos(\lg 2x)}_{\text{Kettenregel 3-fach}} + \lg 2$$

Ableitung einer Summe

$$h'(x) = 2(-\sin 2x) \cdot \frac{1}{\cos 2x \cdot \ln 10}$$

$$\text{da } (a \log x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$- 2 \frac{1}{2x \ln 10} (-\sin(\lg 2x))$$

55)

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1} \quad \left[x \neq \frac{1}{2} \right]$$

$$f'(x) = \frac{-4}{(2x-1)^2} = (-4)(2x-1)^{-2} *$$

$$f''(x) = (-4) \cdot (-2) (2x-1)^{-3} \cdot 2$$

$$f'''(x) = (-4) \cdot (-2) \cdot (-3) (2x-1)^{-4} \cdot 2 \cdot 2$$

$$f^{(4)}(x) = (-4) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (2x-1)^{-4} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Vermutung

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f^{(n)}(x) = \underbrace{(-4) \cdot (-1)^{n-1}}_{-1 \cdot 2^n} n! \cdot \underbrace{2^{n-1}}_{2^{n-1}} (2x-1)^{-n-1}$$

$$= (-1)^n \cdot 2^{n+1} \cdot n! \cdot (2x-1)^{-n-1}$$

Beweis (vollst. Ind)

$$n=1 \quad f'(x) = \underbrace{(-1)^1}_{-1} \cdot \underbrace{2^2}_1 \cdot \underbrace{1!}_1 (2x-1)^{-1-1}$$

(w)

siehe *

Ind Ann.

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n 2^{n+1} n! (2x-1)^{-n-1}$$

Ind Beh

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{(n+1)} 2^{n+2} (n+1)! (2x-1)^{-(n+1)-1}$$

Beweis

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x) \right)' = \frac{(-1)^n 2^{n+1} \cdot n! \cdot (-n-1)}{(2x-1)^{-n-2} \cdot 2} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+2} (n+1)!}{(2x-1)^{-(n+1)-1}}$$

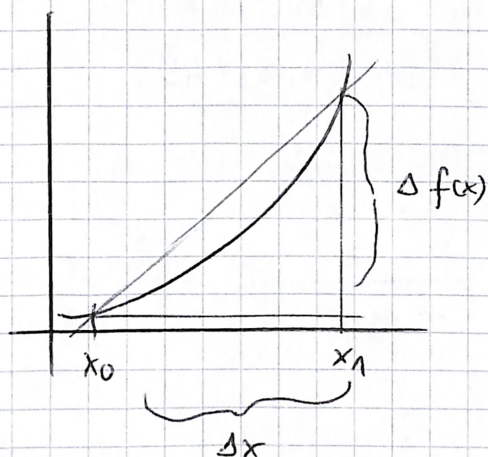
q. e. d.

$$\begin{aligned} & n! (n+1) \\ & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n (n+1) \end{aligned}$$

52

$$f(x) = \frac{3x-4}{2x-7}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{2} \right\}$$



$$m_s = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = m_t$$

$$f'(-3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-3 + \Delta x) - f(-3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{-13+2h} = \frac{1}{13}$$

$$\begin{aligned} \underline{NR:} &= \frac{\frac{3(-3+h)-4}{3(-2+h)-7} - \frac{3(-3)-4}{2(-3)-7}}{h} = \frac{\frac{-9-4+3h}{-6-7+2h} - \frac{-9-4}{-6-7}}{h} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{-13+3h}{-13+2h} - 1}{h} = \frac{\frac{-13+3h+13-2h}{-13+2h}}{h} = \frac{h}{13+2h} \cdot \frac{1}{h} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{-13+2h}$$

$$f'(x) = \frac{3(2x-7) - 2(3x-4)}{(2x-7)^2} = \frac{6x-6x-21+8}{4x^2-28x+49} = \frac{-13}{4x^2-28x+49}$$

$$f'(-3) = \frac{-13}{4 \cdot 9 + 32 + 49} = \frac{-13}{-169} = \frac{1}{13}$$