

WS 2000/01

56. Für die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ möge gelten: $h(1) = \ln 3$, $h'(1) = 2$.

Man bestimme $f'(2)$ für $f(x) = 11 + \left(2 + \ln\left(-2 + e^{h(x^2-3)}\right)\right)^4$.

$$\begin{array}{ccc} (x+1) & e^{\ln(x+1)} & \ln(1) = \ln 3 \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 3 & \Longleftrightarrow & e^{\ln 3} \end{array}$$

57. Gegeben sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{\pi} \cos(\pi\sqrt{2+x^2})$. Man bestimme das Differential bei $x_0 = \frac{1}{2}$.

Wie ändert sich $f(x)$ näherungsweise, wenn x von 0,5 zu 0,497 abgeändert wird?

58) Man untersuche die durch $D(f) =]-4, 4[$ und $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 15$ definierte Funktion auf Extrema.

59) Man untersuche die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2 + x}{6 - x - x^2}$ auf Achsensymmetrie.

60 Gesucht ist ein gerader Kreiszylinder mit möglichst kleiner Oberfläche O bei gegebenem Volumen V .

61. Eine ganzrationale Funktion 5. Grades f ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Sie hat in $(-2, ?)$ einen Wendepunkt. Die Tangente im Punkt $(1, ?)$ geht durch $(2, -2)$ und durch $(-1, 103)$.

Abgabe: bis spätestens Montag, 22.01.01, 14.00 Uhr im Postfach „Höhere Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ im Raum H-C 5326 (AVZ, Ebene 5); **nicht** Postfach Prof. Dr. Fröhlich!

Bitte vermerken sie neben ihrem Namen auch ihre Gruppenzugehörigkeit bzw. -nummer!!!

Danke!!!

58) Man untersuche die durch $D(f) =]-4,4]$ und $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 15$ definierte Funktion auf Extrema

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 15$$

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$$

$$f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$$

$$f'''(x) = 72x + 24$$

rel. Extrema

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x = 12x(x^2 + x - 6) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = -3$$

Überprüfen der Vorzeichen in $f''(x)$

$$f''(x) = 36x^2 + 24x - 72 = 12(3x^2 + 2x - 6)$$

$$\text{für } x_1 = -6 < 0 \quad (\text{monoton fallend, Konkav, max})$$

$$\text{für } x_2 = 144 > 0 \quad (\text{monoton wachsend, Konkav, min})$$

$$\text{für } x_3 = 468 > 0 \quad (\text{monoton wachsend, Konkav, min})$$

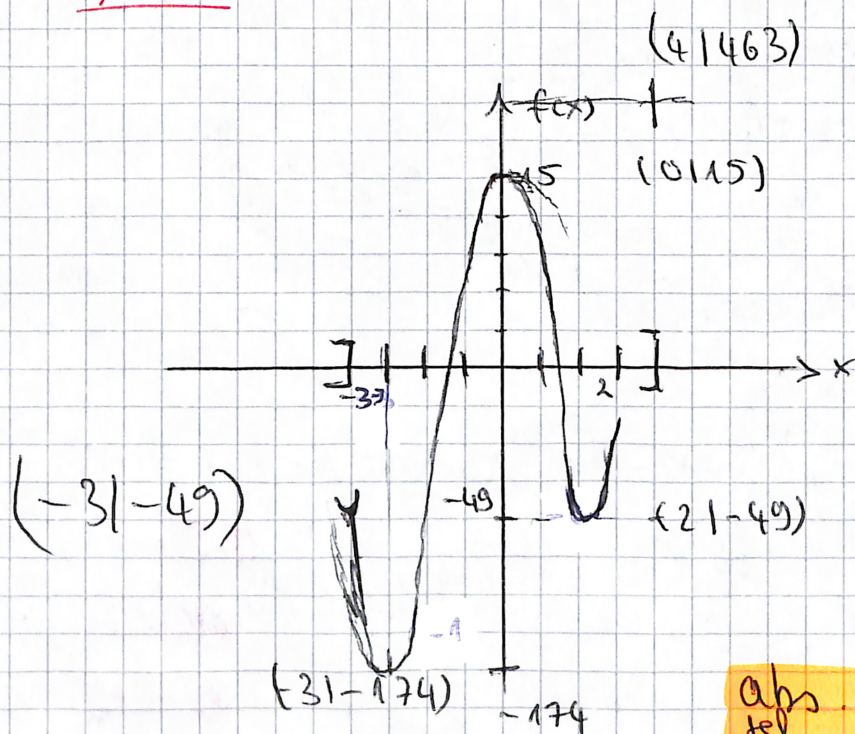
Berechnung der $f(x)$ -Werte für $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 15$

$$x_1 = 0 \quad f(x) = 15$$

$$x_2 = 2 \quad f(x) = 48 + 32 - 144 + 15 = -49$$

$$x_3 = -3 \quad f(x) = 243 - 108 - 324 + 15 = -174$$

Leider fehlt noch das Randmaximum, sonst alles i.O.



Verhalten am Rand

$$f(4) = 463 \quad (\text{absolutes Max})$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -49$$

$$\begin{array}{r} 463 \\ - 856 \\ \hline 549 \\ - 527 \\ \hline 22 \end{array}$$

abs. Min bei $x = -3$	$f(x) = -174$
rel. Max $x = 0$	$f(x) = 15$
rel. Min $x = 2$	$f(x) = -49$
Rand Max (abs. Max) $x = 4$	$f(x) = 463$

(59)

Man untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{6 - x - x^2} \quad \text{auf Achsensymmetrie}$$

- Achsensymmetrie wenn gilt: $f(x) = f(-x)$

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{6 - x - x^2} \neq f(-x) = \frac{x^2 - x}{-6 + x + x^2}$$

deshalb nicht Achsensymmetrisch

22.01.01
sta.

Aufgabe 56

Für die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ möge gelten:

$$h(1) = \ln 3, \quad h'(1) = 2$$

Man bestimme $f'(2)$ für $f(x) = 11 + \left(2 + \ln \left[-2 + e^{h(x^2+3)} \right] \right)^3$

$$f'(x) = 4 \left[2 + \ln \left[-2 + e^{h(x^2+3)} \right] \right]^3 \cdot \frac{1}{-2 + e^{h(x^2+3)}} \cdot e^{h(x^2+3)} \cdot 2x \cdot h'(x^2+3)$$

$$f'(2) = 4 \left[2 + \ln \left[-2 + e^{h(1)} \right] \right]^3 \cdot \frac{1}{-2 + e^{h(1)}} \cdot e^{h(1)} \cdot 2 \cdot 2 \cdot h'(1)$$

Setze für $h(1) = \ln 3$ und $h'(1) = 2$

$$f'(2) = 4 \left[2 + \ln \left[-2 + e^{\ln 3} \right] \right]^3 \cdot \frac{1}{-2 + e^{\ln 3}} \cdot e^{\ln 3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$= 4 \left[2 + \ln \left[-2 + 3 \right] \right]^3 \cdot \frac{1}{-2 + 3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$= 4 \left[2 + \ln 1 \right]^3 \cdot \frac{1}{1} \cdot 3 \cdot 8$$

$$= 4 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 8 = \underline{\underline{768}}$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(1) = \ln 3$$

$$h'(1) = 2$$

$$f'(2) \text{ für } f(x) = 11 + \left[2 + \ln \left(-2 + e^{h(x^2+3)} \right) \right]^4$$

$$\begin{aligned} x^2 &\stackrel{=2}{=} \rightarrow x^2 - 3 = r \stackrel{=1}{=} \rightarrow h(r) = s \stackrel{=\ln 3}{=} \rightarrow e^s - 2 = t \stackrel{=1}{=} \rightarrow \ln t + 2 = u \stackrel{=2}{=} \\ 2x &\stackrel{=4}{=} \rightarrow 11 + u^4 \quad (=27) \leftarrow \text{nicht gefragt} \end{aligned}$$

$$f'(2) = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 32 = 768$$

$$a^{\log x} = x$$

$$a^0 = 1$$

$$a^y = x$$

$$\text{deshalb } a^{\log 1} = 0$$

- Der Logarithmus versteht sich als Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion
- Alle Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt (0|1)
- Alle Logarithmusfunktionen gehen durch den Punkt (1|0)

Aufgabe 57

gegeben sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{\pi} \cos(\pi \sqrt{2+x^2})$.

Man bestimme das Differential bei $x_0 = \frac{1}{2}$.

Wie ändert sich $f(x)$ näherungsweise, wenn x von 0,5 zu 0,497 abgeändert wird?

- Die Proportionalität bekommt man über die Steigung der Tangente $m = f'(x_0) = \frac{df}{dx}$

- aufgelöst nach df

- $df = f'(x_0) dx$

- Ableiten der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cos(\pi \sqrt{2+x^2})$$

$$g(u(x)) = g'(u) \cdot u'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\pi} (-\sin(\pi \sqrt{2+x^2})) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} \cdot 2x$$

$$f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\pi} (-\sin(\pi \sqrt{\frac{9}{4}})) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}}} \cdot 2 \cdot 0,5$$

$$= \frac{1}{\pi} (-\sin(\frac{3}{2}\pi)) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{\frac{3}{2}} \cdot 2 \cdot 0,5$$

$$= \frac{1}{\pi} \underbrace{(-\sin(\frac{3}{2}\pi))}_{=1} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

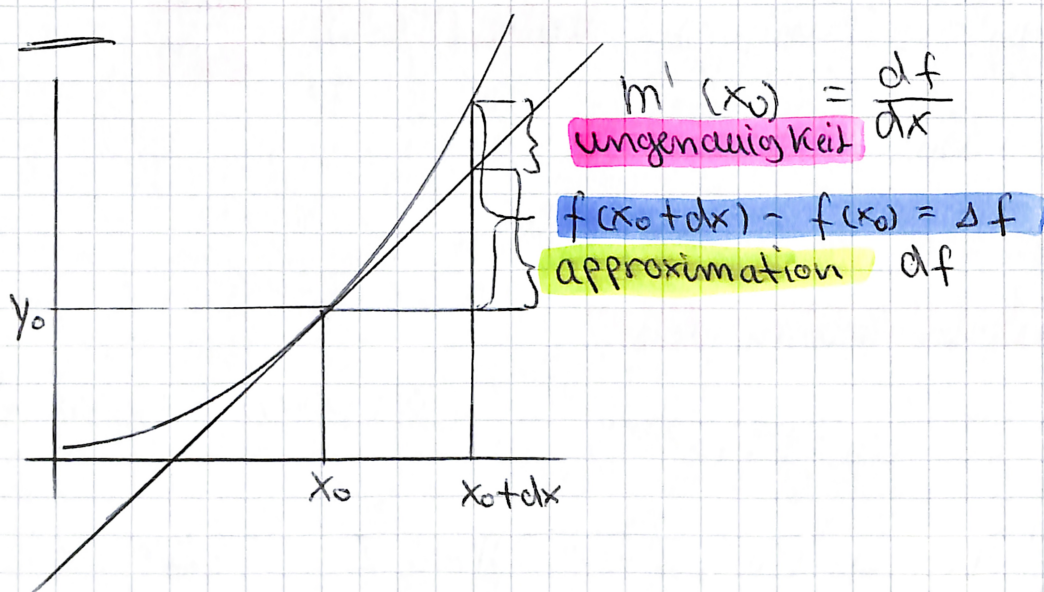
$$df \Big|_{x=0,5} = \frac{1}{3} dx$$

Differential an der Stelle 0,5. Lineare Beziehung zwischen den Änderungen

Ausgehend von 0,5 ist die Änderung $\frac{1}{3}$ in die selbe Richtung (da das selbe Vorzeichen)

$$\frac{1}{3} \text{ von } -0,003 = \underline{\underline{-0,001}}$$

Wie ändert sich der Funktionswert wenn x von 0,5 auf 0,497 fällt? $\Rightarrow -0,001$



- Beziehung zwischen den Änderungen heißt das Differential an x_0 $\rightarrow$ soll aufgestellt werden.
- Ein doppelt so grosses x soll einen doppelt so grossen Wert in y hervorrufen.
- Eigentlich ist dies nur bei einer Gerade möglich
- Man nähert die Funktion an eine Gerade an (Approximation)
- Man ersetzt die Gerade durch die Tangente im Ausgangspunkt (unlineare Approximation)

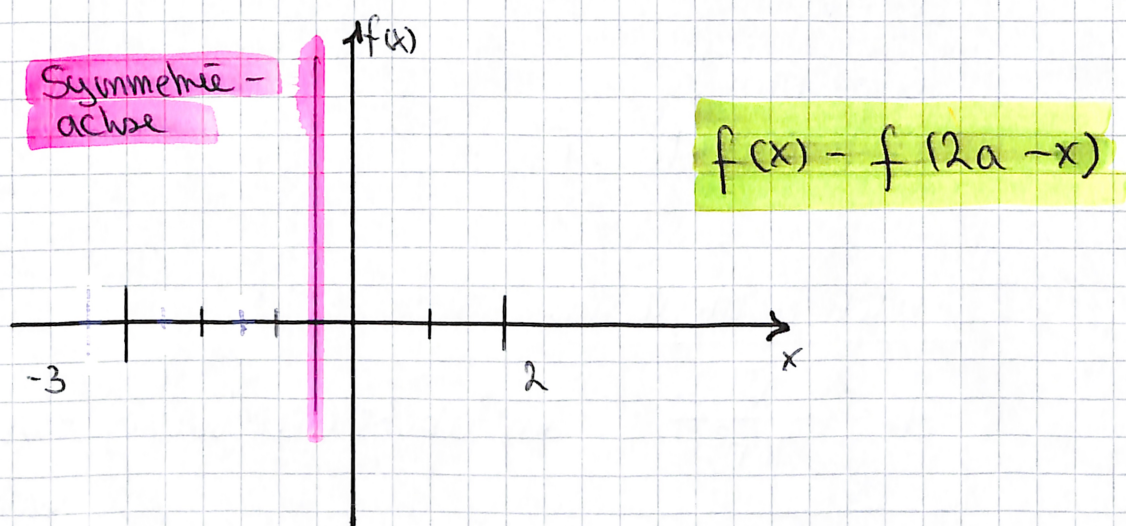
59) Man untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{6 - x - x^2} \text{ auf Achsensymmetrie}$$

Bestimmung der NS des Nenners

$$6 - x - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \quad \vee \quad x = 2$$



Achsensymmetrie nur Sym. zu $x = -\frac{1}{2}$ ($=a$)

$$f(-1 - x) \stackrel{?}{=} f(x)$$

in Gleichung einsetzen:

$$= \frac{(-1-x)^2 + (-1-x)}{6 - (-1-x) - (-1-x)^2}$$

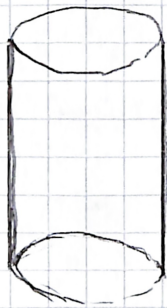
$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - 1 - x}{6 + 1 + x - 2x - x^2 - 1}$$

$$= \frac{x^2 + 2x}{6 - x - x^2} \Leftrightarrow f(x) \Rightarrow$$

Achsensym.
zur Achse $x = -\frac{1}{2}$

60)

Gesucht ist ein gerader Kreiszylinder mit möglichst kleiner Oberfläche O bei gegebenem Volumen V



$$V = \bar{V}$$

$$O \rightarrow \min!$$

$$V = \pi r^2 \cdot h = \bar{V}$$

nach h auflösen

$$h = \frac{\bar{V}}{\pi r^2}$$

in obere Gleichung einsetzen

$$O\left(r, \frac{\bar{V}}{\pi r^2}\right) = f(r) = \overset{\text{Fläche des Kreises}}{2\pi r^2} + \overset{\text{Umfang des Kreises}}{\frac{2\pi r \bar{V}}{\pi r^2}}$$

$$f(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\bar{V}}{r} \rightarrow \boxed{\min}$$

$$f'(r) = 4\pi r - \frac{2\bar{V}}{r^2}$$

$$f''(r) = 4\pi + \frac{2\bar{V} \cdot 2}{r^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r - \frac{2\bar{V}}{r^2} = 0$$

$$\begin{aligned} 4\pi r &= \frac{2\bar{V}}{r^2} \\ r^3 &= \frac{2\bar{V}}{4\pi} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{2\bar{V}}{4\pi}} \end{aligned}$$

Zu 60

in $f''(x)$ einsetzen

rel. min = abs. min

$$f''(x) = 4\pi + \frac{2\bar{v} \cdot 2}{r^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\pi + \frac{2\bar{v} \cdot 2}{\frac{2\bar{v}}{4\pi}}$$

$$= 4\pi + \frac{4\bar{v} \cdot 4\pi}{2\bar{v}}$$

$$= 4\pi + 2\bar{v} \cdot 4\pi > 0 \rightarrow \boxed{\text{min}}$$

Somit hat $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ ein rel. min

Verhalten von $r \rightarrow \infty$

$$r \rightarrow 0 = \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{O}(r) = \infty = \lim_{r \rightarrow 0+0} \tilde{O}(r)$$

- absolutes Min $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ mit $h = \frac{\bar{v} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \pi^{\frac{2}{3}}}{\pi \bar{v}^{\frac{2}{3}}} =$

$$\sqrt[3]{\frac{4 \cdot \bar{v}}{\pi}}$$

61) Eine ganzrationale Funktion 5. Grades f ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Sie hat in $(-2, ?)$ einen Wendepunkt. Die Tangente im Punkt $(1, ?)$ geht durch $(2, -2)$ und durch $(-1, 103)$.

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

① Punktsymmetrisch
 $f(-x) = -f(x)$

da alle geraden Exponenten die Punktsymmetrie erfüllen, lassen wir diese weg und betrachten nur die Glieder mit ungeraden Exponenten.

$$f'(x) = 5ax^4 + 3cx^2 + e$$

$$f''(x) = 20ax^3 + 6cx$$

- $f'(x) = 0$ ist notwendig für Vorlage eines Extremums. am $x = 2$

② - am $x = 2$ existiert ein WP

- $\left. \begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \neq 0 \end{array} \right\}$ relatives Extremum

③ Untersuchung WP $(-2, ?)$

$$f''(-2) = 0$$

WP

$$f'(1) = -35$$

Gerade

$$f(1) = 33$$

Bestimmung der Geraden $(2, -2)$ $(-1, 103)$

$$\frac{y+2}{x-2} = \frac{105}{-3} = -35 \quad \left| \quad \frac{y+2}{x-2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{105}{-3} \right.$$

$$y = -35(x-2) - 2$$

$$y = -35x + 68$$

Gleichung der Tangente in $(1, ?)$

$$\textcircled{3} \quad a + c + e = 33$$

$$5a + 3c + e = -35$$

$$-160a - 12c = 0$$

Gauß Algorithmus