

62. Man berechne das bestimmte Integral $\int_{-2}^0 3x^2 dx$ über die Obersummen (äquidistante Zerlegung).

63. Man integriere unbestimmt:

$x \cdot (x+2a)^4$; $\frac{2x+3}{(6x+7)^2}$; $\cos x \cdot \cos 3x$; $\frac{x^2+1}{\sqrt{5x+9}}$; $\frac{x^2+3x-1}{x}$

64. Man bestimme:

$\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+\sin^2 x} dx$; $\int x^m \cdot \ln x dx$ ($m \in \mathbb{N}$).

65. Man bestimme:

$\int_{-2}^1 (x+2)^4 dx$; $\int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt$; $\int_1^2 (2x+1) \cdot \sqrt[3]{2x^2+2x+15} dx$

Man bestimme alle Stammfunktionen $\rightarrow +C$ nicht vergessen

66. Man kreuze für die folgenden uneigentlichen Integrale die jeweils richtigen Aussagen an:

a. $\int_0^\infty xe^{-x^2} dx$; b. $\int_{-3}^3 x^{-3} dx$; c. $\int_0^5 |x-3|^{-\frac{1}{2}} dx$; d. $\int_{-\infty}^\infty \sin x dx$

a.	existiert nicht	☒	$= 0,5$	☐	$= 0$	☒	$= -\ln 2$	☐
b.	existiert nicht	☐	$= 0$	☒	$= \frac{1}{9}$	☐	$= \infty$	☐
c.	existiert nicht	☒	$= 2(\sqrt{2}-\sqrt{3})$	☒	$= 2\sqrt{5}$	☐	$= 2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$	☐
d.	existiert nicht	☒	$= \pi$	☐	$= 0$	☐	$= 1$	☐

o.p.

Abgabe: bis spätestens Montag, 29.01.01, 14.00 Uhr im Postfach „Höhere Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ im Raum H-C 5326 (AVZ, Ebene 5); nicht Postfach Prof. Dr. Fröhlich!!

Bitte vermerken sie neben ihrem Namen auch ihre Gruppenzugehörigkeit bzw. -nummer!!!

Bestimmung über die Obersumme!

62)

$$\int_{-2}^0 3x^2 dx = x^3 \Big|_{-2}^0 = "0^3 - (-2)^3" = \underline{\underline{8}}$$

63) $\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$

$x \cdot (x+2a)^4$

$$g'(x) = x$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$f(x) = (x+2a)^4$$

$$f'(x) = 4(x+2a)^3$$

$$\begin{aligned} \int (x+2a)^4 \cdot x dx &= (x+2a)^4 \cdot \frac{x^2}{2} - \int 4(x+2a)^3 \cdot \frac{x^2}{2} \\ &= (x+2a)^4 \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \int (x+2a)^3 \cdot x^2 \end{aligned}$$

$$f(x) = (x+2a)^3$$

$$f'(x) = 3(x+2a)^2$$

$$g'(x) = x^2$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$\begin{aligned} &= (x+2a)^3 \cdot \frac{1}{3}x^3 - \int 3(x+2a)^2 \cdot \frac{1}{3}x^3 \\ &= (x+2a)^3 \cdot \frac{1}{3}x^3 - \int (x+2a)^2 \cdot x^3 \end{aligned}$$

63

$$x \cdot (x+2a)^4$$

$$g'(x) = x \quad (x+2a)^4$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \frac{1}{5}(x+2a)^5$$

$$f(x) = (x+2a)^4 = x$$

$$f'(x) = 4(x+2a)^3 = 1$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$\int (x+2a)^4 \cdot x dx = (x+2a)^4 \cdot \frac{x^2}{2} - \int 4(x+2a)^3 \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$= (x+2a)^4 \cdot \frac{x^2}{2} - 4 \frac{(x+2a)^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \ln x^2 + C$$

$$\cos x \cdot \cos 3x$$

$$g'(x) = \cos x$$

$$u = \cos x$$

$$g(x) = -\sin x$$

$$u' = -\sin x$$

$$f(x) = \cos 3x \quad v' = \cos 3x$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \sin 3x \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$\int \cos 3x \cdot \cos x = -\cos 3x \cdot \sin x + \int \frac{1}{3} \sin 3x \cdot \sin x$$

$$\frac{1}{3} \cos x \sin 3x + \frac{1}{3} \int \sin x \sin 3x dx =$$

$$u = \sin x \quad u' = \cos x$$

$$v' = \sin 3x \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x$$

$$= \frac{1}{3} \cos x \sin 3x + \frac{1}{3} (-\sin x \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos x \cos 3x dx)$$

$$= \dots$$

64)

$$\int x^m \ln x \, dx = x^{m+1} \left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) + C$$

$$g'(x) = \ln x$$

$$g(x) = x \ln x - x$$

$$f(x) = x^m$$

$$f'(x) = m x^{m-1}$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

$$\int x^m \cdot \ln x \, dx = x^m \cdot (x \ln x - x) - \int m x^{m-1} \cdot (x \ln x - x) \, dx$$

$$65 \quad \int_1^e \frac{\ln t}{t^2} \, dt = \frac{\ln t}{1 \cdot t} - \frac{1}{1 \cdot x}$$

$$= \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e} \right) - \frac{0}{1} - \frac{1}{1}$$

$$= -1 \quad f.$$

$$\int_{-2}^1 (x+2)^4 \, dx = \frac{(x+2)^5}{5} = \frac{0}{5} - \frac{3^5}{5}$$

$$= -\frac{243}{5} = -48,6 \quad \vee \quad 48 \frac{2}{3} \quad f.$$

⚡
Achtung: Grenzen

müssen in die Substitution auch eingebezogen werden!

1

64)

$$\int x^m \cdot \ln x \, dx \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$\int f(u(x)) u'(x) \, dx = \int f(u) \, du \quad u=u(x)$$

$$\int u(x) v'(x) \, dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) \, dx$$

$$v' = x^m \quad u = \ln x$$

$$v = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{m+1} x^{m+1} \ln x - \frac{1}{m+1} \int x^m \, dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln x - \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

63) $\int \cos x \cos 3x \, dx$

$$u = \cos x \quad v' = \cos 3x$$

$$u' = -\sin x \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x$$

$$= \frac{1}{3} \cos x \cos 3x \, dx + \frac{1}{3} \int \sin x \sin 3x \, dx$$

$$u = \sin x$$

$$v' = \sin 3x$$

$$= \frac{1}{3} \cos x \sin 3x + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \sin x \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos x \cos 3x \, dx \right)$$

$$u' = \cos x$$

$$v = -\frac{1}{3} \cos 3x$$

$$= \frac{1}{3} \cos x \sin 3x - \frac{1}{9} \sin x \cos 3x + \frac{1}{9} I$$

$$\frac{8}{9} I =$$

- II -

$$\int \cos x \cos 3x \, dx = \frac{3}{8} \cos x \sin 3x - \frac{1}{8} \sin x \cos 3x + C$$

66)

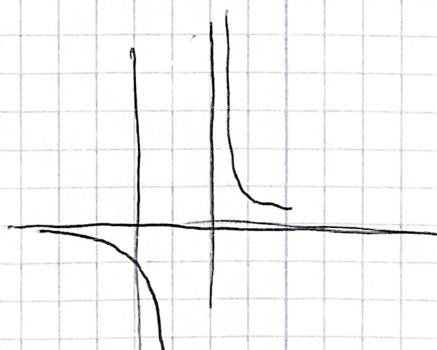
$$\int_{-3}^3 x^{-3} dx$$

1. Stammfunktion

2. Werte einsetzen

3. Limit ausrechnen

$$\lim_{R_1 \rightarrow 0-0} \int_{-3}^{R_1} x^{-3} dx \quad \lim_{R_2 \rightarrow 0+0} \int_{R_2}^3 x^{-3} dx$$



$$\lim_{R_1 \rightarrow 0-0} \int_{-3}^{R_1} x^{-3} dx = \lim_{R_1 \rightarrow 0-0} \left. \frac{x^{-2}}{-2} \right|_{-3}^{R_1} = \lim_{R_1 \rightarrow 0-0} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{9} \right) \rightarrow -\infty$$

65 / 3)

$$\int_1^2 (2x+1) \cdot \sqrt[3]{2x^2+2x+15} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 2(2x+1) \cdot \sqrt[3]{2x^2+2x+15} dx$$

$$\int u v' dx = uv - \int u' v dx$$

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \int f(u) du \quad u=u(x)$$

$$u = 2x^2 + 2x + 15$$

$$u' = 4x + 2$$

$$du = (4x + 2) dx$$

$$x = 1 \longleftrightarrow u = 19$$

$$x = 2 \longleftrightarrow u = 27$$

Nun sehen Integral darf kein x mehr sehen, ~~als~~ nur noch u

$$= \frac{1}{2} \int_{19}^{27} u^{\frac{1}{3}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} \bigg|_{19}^{27}$$

1

(2)

$$\frac{3}{8} \cdot 81 - \frac{3}{8} \cdot 19 \cdot \sqrt[3]{19}$$

63) $\int \cos x \cdot \cos 3x \, dx =$

$$u = \cos x \quad v' = \cos 3x$$

$$u' = -\sin x \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x$$

$$= \cos x \cdot \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{3} \int \sin x \sin 3x \, dx$$

u und v so wählen,
da sonst die Integration
rückgängig gemacht wird.

$$u = \sin x$$

$$u' = \cos x$$

$$v' = \sin 3x$$

$$v = -\frac{1}{3} \cos 3x$$

$$= \frac{1}{3} \cos x \sin 3x + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \sin x \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos x \cos 3x \, dx \right)$$

$$I = \frac{1}{3} \cos x \sin 3x - \frac{1}{9} \sin x \cos 3x + \frac{1}{9} I$$

$$| - \frac{1}{9} I$$

$$\frac{8}{9} I = \frac{1}{3} \cos x \sin 3x - \frac{1}{9} \sin x \cos 3x$$

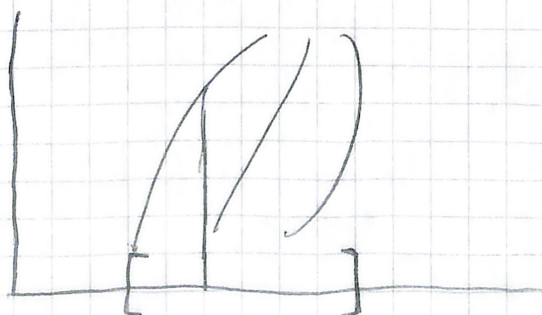
$$| \cdot \frac{9}{8} I$$

$$\Rightarrow \int \cos x \cos 3x \, dx = \frac{3}{8} \cos x \sin 3x - \frac{1}{8} \sin x \cos 3x + C$$

Kein Bereichsintegrale

66)

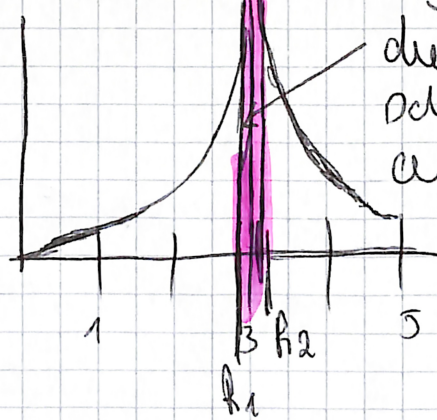
$$\int_0^5 |x-3|^{-\frac{1}{2}} \, dx$$



Intervall in endlich
viele Teilintervalle zerlegt

Bestimmung der Unendlichkeitsstelle

$$\frac{1}{\sqrt{x-3}}$$



diesen Bereich
schneidet man
aus dem Integral

Man schneidet die Unendlichkeitsstelle aus dem

Integral (Den Grund für die Uneigentlichkeit
nicht beachten)

$$= \lim_{R_1 \rightarrow 3-0} \int_0^{R_1} (x-3)^{-\frac{1}{2}} dx + \lim_{R_2 \rightarrow 3+0} \int_{R_2}^5 |x-3|^{-\frac{1}{2}} dx$$

- Beide Grenzwerte müssen existieren
- Stammfunktion
- Grenzen einsetzen
- Limit einsetzen

$$= \lim_{R_1 \rightarrow 3-0} \int_0^{R_1} (3-x)^{-\frac{1}{2}} dx + \lim_{R_2 \rightarrow 3+0} \int_{R_2}^5 (x-3)^{-\frac{1}{2}} dx$$

da $x-3$ negativ ist $|-1|$ multiplizieren
und erhält $(3-x)$

$$= \lim_{R_1 \rightarrow 3-0} -2(3-x)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{R_1} + \lim_{R_2 \rightarrow 3+0} 2(x-3)^{\frac{1}{2}} \Big|_{R_2}^5$$

$$= \lim_{R_1 \rightarrow 3-0} \left| -2\sqrt{3-2} + 2\sqrt{3} \right| + \lim_{R_2 \rightarrow 3+0} \left| 2\sqrt{2} - 2\sqrt{R_2-3} \right| = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

3

66a)

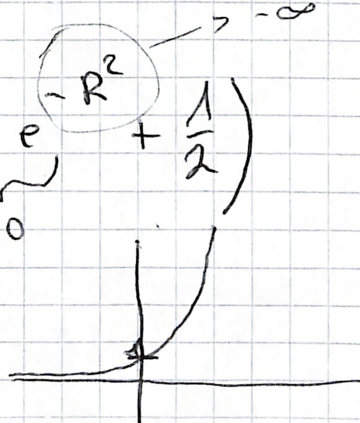
$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R x e^{-x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int -2x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$u = -x^2$$

$$u' = -2x$$

$$du = -2x dx$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^R \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-R^2} + \frac{1}{2} \right)$$


Das uneigentliche Integral existiert und geht gegen $\frac{1}{2}$

II.1

$$\int \ln(2 - \sin x) \sqrt{2 - \sin x} \cdot \cos x \, dx$$

$$z = 2 - \sin x$$

$$= \int \ln z \cdot \sqrt{z} \, dz$$

$$\frac{dz}{dx} = -\cos x$$

$$= -\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \ln z + \frac{2}{3} \int z^{\frac{1}{2}} dz \right)$$

$$-dz = +\cos x \, dx$$

$$= \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\int (uv)' = \int u'v + \int v'u$$

$$= -\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \ln z + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$u \cdot v = \int v' u + \int u' v$$

$$= \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} - \ln z \right)$$

$$\int u'v = u \cdot v - \int v'u$$

$$= \frac{2}{3} (2 - \sin x)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} - \ln(2 - \sin x) \right) + C$$

$$u' = \sqrt{z}$$

$$u = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$$

$$v = \ln z$$

$$v' = \frac{1}{z}$$

$$\int \left(x \sqrt{\ln(x+1)^5} + \frac{4}{x^5} \right) dx$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x+2}{x} \right) = \frac{x+2}{x^2}$$

$$\int (x+1) \cdot e^{x^2-x} dx$$

$$-x^2 - x = z$$

$$= - \int e^z dz$$

$$\frac{dz}{dx} = -2x - 1$$

$$= -e^z$$

$$-dz = (2x+1) dx$$

$$= -e^{-x^2-x}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = -e^{-1-1} + (-e^{0-0}) = -e^2 - 1 = -(e^2 + 1) = -\left(1 + \frac{1}{e^2}\right)$$

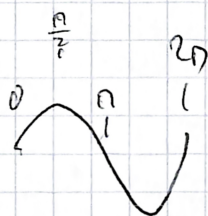
$$\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$$

$u' \quad v$

$$u' = \sqrt[3]{x}^{+1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$v' = \frac{1}{x}$

$$\int \sqrt[3]{x} \ln x dx = \left(\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \int \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{x} dx \right)$$



$$= \int \frac{3}{4} x^{\frac{1}{3}} dx$$

$$= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{9}{16} x^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \left(\ln x - \frac{3}{4} \right) + C$$

$$\int \sqrt[4]{z} dz$$

$\frac{1}{4}$

$$\sin x = z$$

$$\frac{dx}{dz} = \cos x$$

$$dz = \cos x dx$$

$$\frac{4}{5} z^{\frac{5}{4}}$$

$$\frac{4}{5} (\cos x)^{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} \left[(\sin \pi)^{\frac{5}{4}} - (\sin \frac{\pi}{2})^{\frac{5}{4}} \right]$$

$$= \frac{4}{5} [0^{\frac{5}{4}} - 1^{\frac{5}{4}}]$$

$$= \frac{4}{5} (-1) = -\frac{4}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 14x + 20}{(x+5)^2}$$

Mit p-q-Formel ausrechnen

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2(x+2) \cancel{(x+5)}}{(x+5) \cancel{(x+5)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2(x+2)}{(x+5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{2(x+2)}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} = -\infty$$

Somit
keinen
eindeutigen
Grenzwert

$$\frac{2x^2 + 14x + 20}{x^2 + 10x + 10}$$

$$\frac{x^2 \left(2 + \frac{14}{x} + \frac{20}{x^2} \right)}{x^2 \left(\frac{10}{x} + \frac{10}{x^2} \right)}$$

$$\frac{2 + \frac{14}{5} + \frac{20}{25}}{\frac{10}{5} + \frac{10}{25}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-5+h) + 2}{(-5+h+5)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-10 + 4 + 2h}{+h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 6}{+h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - \left(\frac{6}{h} \right)}{1} = -\infty$$

$$(\sqrt{x} - 9)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x - 81}$$

$$D: x \geq 81$$

$$3x^{\frac{4}{3}} + 120x^{\frac{2}{3}} + 432 = 0$$

$$z = x^{\frac{2}{3}}$$

$$z^2 + 40z + 144 = 0$$

$$z_{1,2} = +20 \pm \sqrt{400 - 144}$$

$$z_{1,2} = +20 \pm \sqrt{256}$$

$$z_{1,2} = +20 \pm 16$$

$$z_1 = 36 \quad z_2 = 4$$

$$x^{\frac{2}{3}} = 36 \vee x^{\frac{2}{3}} = 4$$

$$x = 216 \vee x = 8$$

$$6x^6 + 8x^5 + 18x^4 + 18x^3 - 5x^2 - 5x - 12 : (3x+4) = 2x^5 + 6x^4 + 2x^3 + x^2 + 3$$

$$\begin{array}{r} 6x^6 \\ 8x^5 \end{array}$$

$$\underline{18x^4 \quad 24x^3}$$

$$\begin{array}{r} -6x^3 \quad -5x^2 \\ -(-6x^3 \quad -8x^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 \quad -5x \\ - (3x^2 \quad +4x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -9x \quad -12 \\ - (-9x \quad -12) \end{array}$$

⊗