

67. Man schraffiere die durch folgende Aussageformen definierten Punktmengen:

a) $(x_1 + 3)^2 + (x_2 + 1)^2 > 25$

äußere eines Kreises

b) $|x_1 + 1| \leq 3 \quad \wedge \quad |x_2 + 2| < 2$

68. Man untersuche, wie sich die durch $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + 2 x_2^4}$ gegebene Funktion bei Annäherung an $(x_1, x_2) = (0, 0)$ längs der Wege

a) $x_2 = a x_1 \quad (a \in \mathbb{R})$

b) $x_2^2 = 2 p x_1 \quad (p \in \mathbb{R}^+)$

verhält.

*(Kontinuität
Ursachen)*

69. Man differenziere die Funktion f mit $f(x_1, x_2) = 3 x_1^2 x_2^3 + 4 x_1^4 - 15 x_2^2 + 28$ an der Stelle $(2, -1)$ partiell nach x_2 durch Aufstellen des Differenzenquotienten und Grenzwertbildung.

3.

70. Es sei $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2} + 3 x_2^{x_1} - \cos(\pi x_1 x_2) + 4 x_2 + 3^{x_1}$.

Man bestimme $f_{x_1}(1, 1)$ und $f_{x_2 x_1}(x_1, x_2)$.

71. Gegeben sei eine Produktionsfunktion p mit $p(v_1, v_2) = 20 v_1^{\frac{1}{2}} v_2^{\frac{1}{4}}$. Man bestimme einen Näherungswert für die tatsächliche Produktionsänderung, wenn die eingesetzten Faktormengen folgendermaßen verändert werden: $v_1 = 16$ fällt auf 95%, $v_2 = 81$ steigt um 0,5%.
Man vergleiche mit der exakten Produktionsänderung.

Aufgabe 70

$$f(x_1, x_2) = x_1^{x_2} + 3x_2^{(x_1)} - \cos(\pi x_1 x_2) + 4x_2 + 3^{x_1}$$

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = x_2 x_1^{x_2-1} + 3x_2^{x_1} \ln 3 + \sin(\pi x_1 x_2) \cdot \pi x_2 + 3^{x_1} \ln 3$$

$$f_{x_1}(1, 1) = 1 + 3 \ln 3 + 0,0548 \cdot \pi + 3,2958$$

$$= 1 + 3,2958 + 0,0548 \cdot \pi + 3,2958$$

$$= 7,76 \quad \text{f.} \quad 1 + 3 \ln 3$$

$$\sin \cdot \pi = 0$$

$$f_{x_2 x_1}(x_1, x_2) = x_2 x_1^{x_2-1} \ln x_1 + x_1^{x_2} \frac{1}{x_1} + 3x_2^{x_1-1} + 3x_1^{x_2} \ln x_2 + \cos(\pi x_1 x_2) \pi x_2 \pi x_1 + \sin(\pi x_1 x_2) \pi$$

Aufgabe 71

$$P(v_1, v_2) = 20 v_1^{\frac{1}{2}} v_2^{\frac{1}{4}}$$

$$P_{v_1}(v_1, v_2) = 10 v_1^{-\frac{1}{2}} v_2^{\frac{1}{4}}$$

$$P_{v_2}(v_1, v_2) = 5 v_1^{\frac{1}{2}} v_2^{-\frac{3}{4}}$$

$$P_{v_1}(16, 81) = (10 \cdot 16^{-\frac{1}{2}} \cdot 81^{\frac{1}{4}}) \cdot 0,95$$

$$= (2,5 \cdot 3) \cdot 0,95$$

$$= 7,125 \quad \text{f.} \quad = \frac{15}{2} = 7,5$$

$$P_{v_2}(16, 81) = (5 \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 81^{-\frac{3}{4}}) \cdot 1,05$$

$$= (20 \cdot 0,037) \cdot 1,05$$

$$= 0,74 \cdot 1,05$$

$$= 0,77 \approx \frac{20}{27} = 0,7408$$

um -6355 Einheiten verringert sich näherungsweise die Produktion. f.

Folgefehler

exakt

$$\Delta P = P(15,2 | 85,05) - P(16 | 81)$$

$$= (20 \cdot 15,2^{\frac{1}{2}} \cdot 85,05^{\frac{1}{4}}) - (20 \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 81^{\frac{1}{4}})$$

$$= 77,97 \cdot 3,0363 - 240 = -3,206177 \quad \text{f.}$$

69

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 x_2^2 + 4x_1^4 - 15x_2^2 + 28$$

$$\frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$$

$$\frac{f(2-1+h) - f(2-1)}{h} = \frac{12(h-1)^2 + 64 - 15(h-1)^2 + 28}{h}$$

$$= \frac{12(h-1)^2 + 64 - 15(h-1)^2 + 28 - (-12 + 64 - 15 + 28)}{h}$$

$$= \frac{12h^3 - 36h^2 + 36h - 12 - 15h^2 + 30h - 15 + 12 + 15}{h}$$

$$\frac{h(12h^2 - 51h + 66)}{h}$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} 66 = f_{x_2}(2, -1)$$

68)

$$f \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + 2x_2^4}$$

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0 \\ x_1 x_2 \rightarrow (0,0)}} f(x_1, x_2)$$

$$x_2 = a x_1 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2) \Big|_{x_2 = a x_1} = \frac{x_1 a^2 x_1^2}{x_1^2 + 2a^4 x_1^4} = \frac{a^2 x_1^3}{x_1^2 + 2a^4 x_1^4}$$

$$= \frac{a^2 x_1^2}{1 + 2a^4 x_1^2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$2) \quad x_1^2 = 2p x_1$$

$$x_1 = \frac{1}{2p} \cdot x_2^2$$

$$(x_1, x_2) \Rightarrow (0, 0) \text{ langs } x_2^2 = 2p x_1 \Leftrightarrow x_1 \rightarrow 0$$

$$f(x_1, x_2) \text{ langs } x_2^2 = 2p x_1$$

$$x_2^2 \text{ ersetzen durch } 2p x_1$$

$$\frac{x_1 \cdot 2p x_1}{x_1^2 + 2 \cdot 4p^2 x_1^2} = \frac{x_1 \cdot 2p x_1^2}{8p^2 x_1^2 + x_1^2} = \frac{2p x_1^2}{x_1^2 (1 + 8p^2)}$$

$$= \frac{2p}{1 + 8p^2}$$

hängt also nicht mehr von x_1 ab und ist somit gelöst.

$$\text{Somit } x_1 \rightarrow 0 = \frac{2p}{1 + 8p^2}$$

71

genauer Wert =
neuer Wert - alter
Wert

$$P(V_1, V_2) = 20 V_1^{\frac{1}{2}} V_2^{\frac{1}{4}}$$

$$V_1 = 16 \quad dv_1 = -0,8$$

$$V_2 = 81 \quad dv_2 = \frac{81}{200}$$

$$dp = P_{V_1}(16|81) dv_1 + P_{V_2}(16, 81) dv_2$$

$$P_{V_1} 20 V_2^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} V_1^{-\frac{1}{2}}$$

$$P_{V_1}(16, 81) = 20 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{2}$$

$$P_{V_2}(16, 81) = 20 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{27} = \frac{20}{27}$$

$$dp = \frac{15}{2} dv_1 + \frac{20}{27} dv_2$$

$$dp = \frac{15}{2} \cdot \frac{-8}{10} + \frac{20}{27} \cdot \frac{81}{200} = -6 + 0,3 = \underline{\underline{-5,7}}$$

68

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2^2}{x_1^2 + 2x_2^3}$$

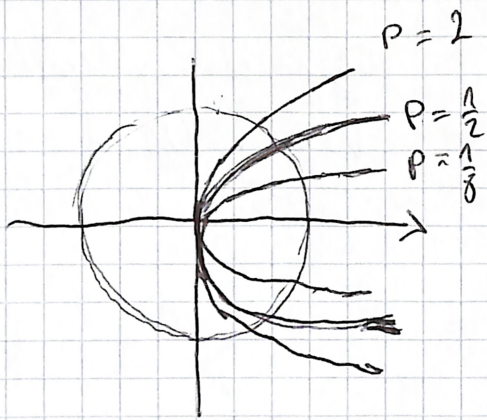
$(x_1, x_2) = (0, 0)$ längs der Wege

Grenzwert der Funktion im Nullpunkt

$$f(x_1, x_2) \Big|_{x_2 = ax_1} \quad f(x_1, ax_1) = \frac{x_1 \frac{2}{a^2} x_1^2}{x_1^2 + 2a^3 x_1^3} =$$

$$\frac{a^2 x_1}{1 + 2a^4 x_1^2}$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{a^2 x_1}{1 + 2a^4 x_1^2} = 0$$



$$x_2^2 = 2px_1 \quad p > 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2p} \cdot x_2^2$$

$$(x_1, x_2) \Rightarrow (0, 0) \text{ längs } x_2^2 = 2px_1 \Leftrightarrow x_1 \rightarrow 0+0$$

$$f(x_1, x_2) \Big|_{x_2^2 = 2px_1} = \frac{x_1 \cdot 2px_1}{x_1^2 + 2 \cdot (4p^2 x_1^2)} = \frac{2px_1^2}{x_1^2 + 8p^2 x_1} =$$

$$\frac{2p}{1 + 8p^2} \xrightarrow{x_1 \rightarrow 0+0} \frac{2p}{8 + p^2}$$

läuft längs der Wege nicht gegen null

lim $f(x_1, x_2)$ $(x_1, x_2) \rightarrow 0$ existiert nicht

67

$$\overbrace{|x_1 + 1| \leq 3}^{\text{Parallel zur } x_2 \text{ Achse}} \wedge \overbrace{|x_2 + 2| < 2}^{\text{Parallel zur } x_1 \text{ Achse}}$$

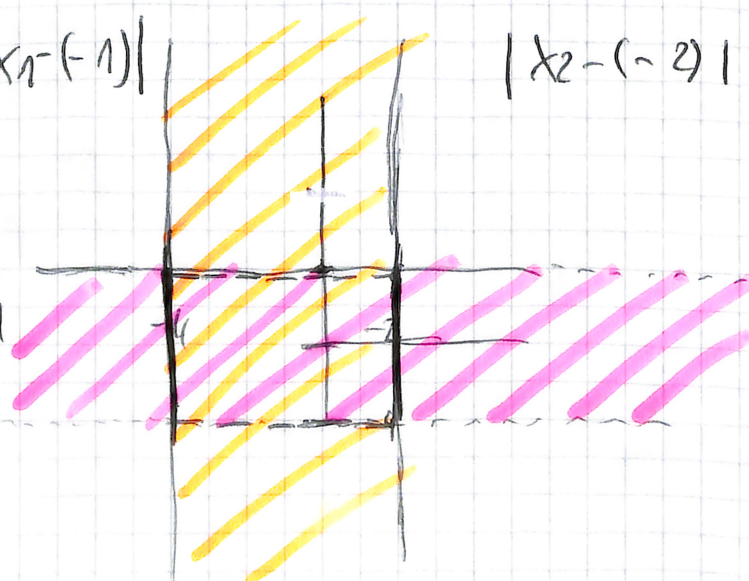
$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 15$$

$$|x_1 - (-1)| \quad |x_2 - (-2)| < 2$$

erfüllt 1. Bed

ohne Randpunkte

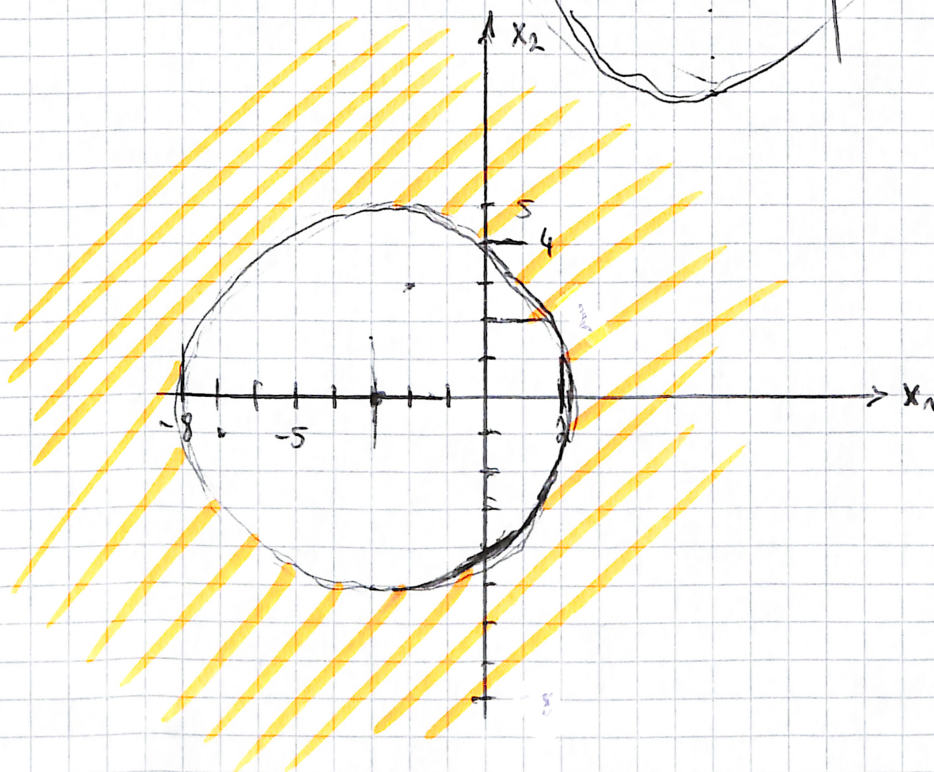
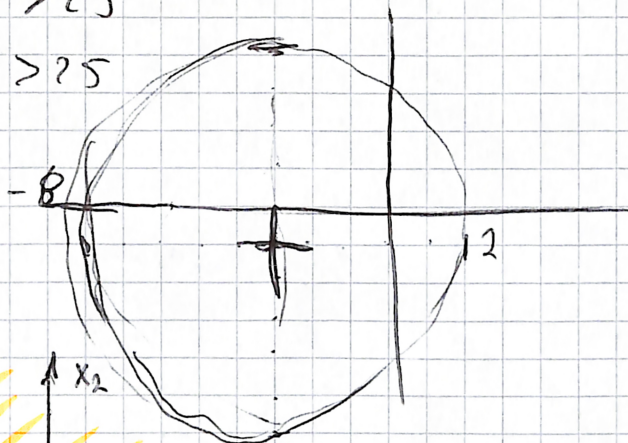


67a)

$$(x_1+3)^2 + (x_2+1)^2 > 25$$

$$(2+3)^2 + (-1+1)^2 > 25$$

$$(-3+3)^2 + (4+1)^2 > 25$$

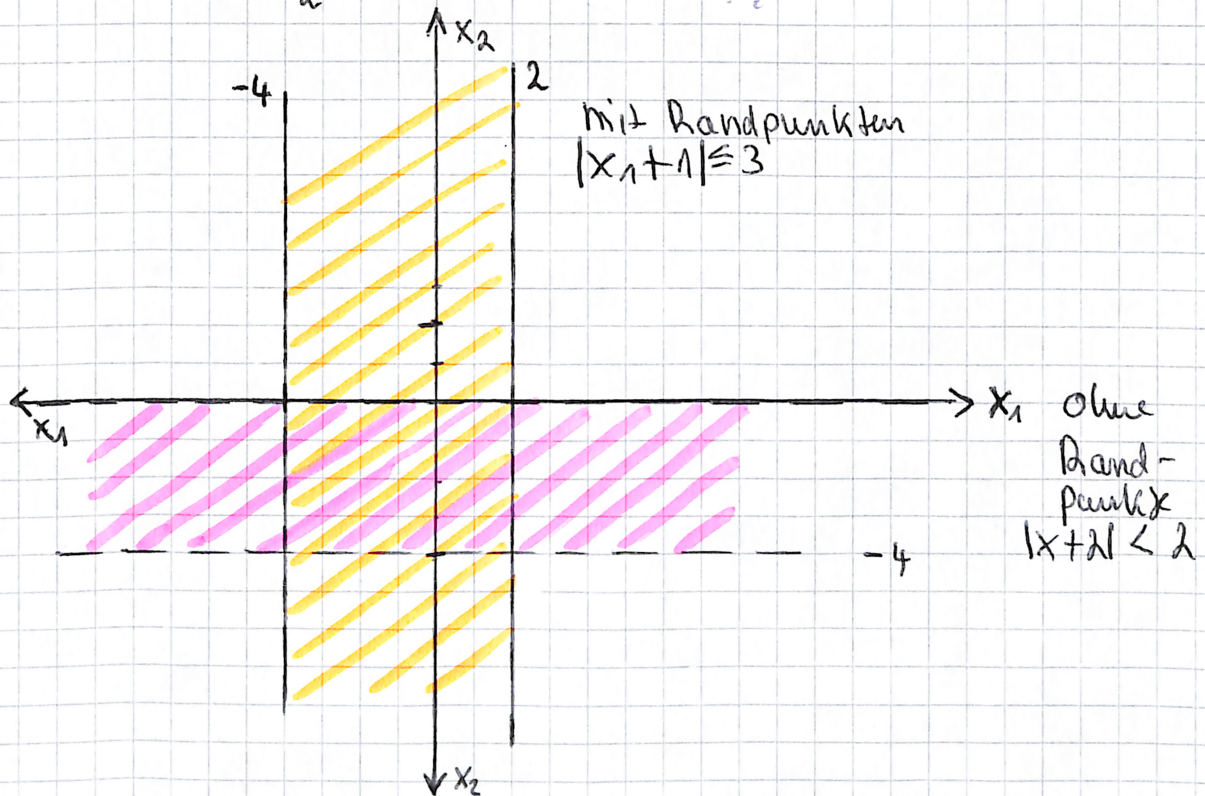


alle Punkte ausserhalb des Kreises bilden die Lösungsmenge der Aussageform!

67) Man skizziere die durch folgende Aussage-
 b) form definierten Punktmengen

$$|x_1 + 1| \leq 3 \quad \wedge \quad |x_2 + 2| < 2$$

parallel zur x_2 -Achse Parallele zur x_1 -Achse



$$|x_2 + 2| < 2 = |x_2 - (-2)| < 2$$

für den Diff.quot. $x_1 = (2, -1)$

$$69) f = \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$$

$$f = \frac{f(2-1+h) - f(2-1)}{h}$$

$$f(x_1, x_2) = 3 \cdot 2^2 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot 2^4 - 15 \cdot 2^2 + 28$$

$$= -12 + 64 - 60 + 28$$

$$= \frac{-12(h-1)^3 + 64 - 15(h-1)^2 + 28(-12 + 64 - 15 + 28)}{h}$$

$$= \frac{12h^3 - 36h^2 + 36h - 12 - 15h^2 + 30h - 15 + 12 + 15}{h}$$

$$= \frac{h(12h^2 - 51h + 66)}{h}$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} = 66 \quad f_{x_2}(2, -1)$$

=

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 15 \cdot 1 + 28 \\ 12 + 4 - 15 + 28 \\ 18 \\ 31 \end{array}$$

$$70) f(x_1, x_2) = x_1^{x_2} + 3x_2^{x_1} - \cos(\pi x_1 x_2) + 4x_2 + 3^{x_1}$$

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = x_2 x_1^{x_2-1} + 3x_2^{x_1} \ln x_2 + \sin(\pi x_1 x_2) \pi x_2 + 3^{x_1} \ln 3$$

$$f_{x_1}(1, 1) = \left[1 \cdot 1^{1-1} \right] + \left[3 \cdot 1^1 \ln 1 \right] + \sin(\pi \cdot 1 \cdot 1) \pi \cdot 1 + \left[3^1 \ln 3 \right]$$

$$= 4 + 3 \ln 3$$

71)

$$p(v_1, v_2) = 20v_1^{\frac{1}{2}} v_2^{\frac{1}{4}}$$

$$v_1 = 16 \quad dv_1 = -0,8$$

$$v_2 = 81 \quad dv_2 = \frac{81}{200}$$

$$p_{v_1}(v_1, v_2) = 10v_1^{-\frac{1}{2}} v_2^{\frac{1}{4}}$$

$$p_{v_2}(v_1, v_2) = 5v_1^{\frac{1}{2}} v_2^{-\frac{3}{4}}$$

$$p_{v_1}(16, 81) = 10 \cdot 16^{-\frac{1}{2}} \cdot 81^{\frac{1}{4}} \\ = (2,5 \cdot 3) \cdot$$

$$= 7,5$$

$$p_{v_2}(16, 81) = 5 \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 81^{-\frac{3}{4}}$$

$$= (20 \cdot 0,037)$$

$$= 0,74$$

Einsetzen von dv_1 und dv_2

$$7,5 \cdot dv_1 + 0,74 \cdot dv_2$$

$$= 7,5(-0,8) + 0,74 \cdot \frac{81}{200}$$

$$= -6 + 0,3$$

$$= \underline{\underline{-5,7}}$$

69

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 x_2^3 + 4x_1^4 - 15x_2^2 + 28$$

$$x_1 = (2, -1)$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \frac{f(\overset{x_1}{2}, \overset{x_2}{-1+h}) - f(\overset{x_1}{2}, \overset{x_2}{-1})}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{3 \cdot 2^2 (-1+h)^3 + 4 \cdot 2^4 - 15(-1+h)^2 + 28 - 3 \cdot 2^2 (-1)^3 + 4(-2)^4 - 15(-1)^2 + 28}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{12(-1+h)^3 + 54 - 15 + 28 + 12 - 54 + 15 - 28}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{12(-1+3h-3h^2+h^3) + 12 + 30h + 15h^2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{-12 + 36h - 36h^2 + 12h^3 + 12 + 30h + 15h^2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = 36h - 36h^2 + 12h^3 \stackrel{+30h+15h^2}{=} \lim_{h \rightarrow 0} h(36 - 36h + 12h^2) \stackrel{+30+15h}{=} 66$$

NR: $(-1+h)^3 = (-1+h)(-1+h)(-1+h)$
 $= (1-2h+h^2)(-1+h)$
 $= -1+h+2h-2h^2-h^2+h^3$
 $= -1+3h-3h^2+h^3$

69 | $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 x_2^3 + 4x_1^4 - 15x_2^2 + 28$

$$\frac{df(2, -1)}{dx_2} = \frac{f(\overset{x_1}{2}, \overset{x_2}{-1+h}) - f(\overset{x_1}{2}, \overset{x_2}{-1})}{h} \quad f_{x_2}(2, -1)$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \frac{3(2)^2(-1+h)^3 + 4(2)^4 - 15(-1+h)^2 + 28}{h}$$

$$= \frac{3 \cdot 2^2 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot 2^4 - 15(-1)^2 + 28}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{12(-1 + 3h - 3h^2 + h^3) - 15(h^2 - 2h + 1) + 12 + 15}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{36h - 36h^2 + 12h^3 - 15h^2 + 30h - 15 + 15}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{36 - 36h + 12h^2 - 15h + 30}{h}$$

$$36 + 30 = 66$$

71)

$$dP = \frac{dP}{dv_1} dv_1 + \frac{dP}{dv_2} dv_2$$

$$dP = \frac{dP}{dv_1} dv_1 + \frac{dP}{dv_2} dv_2$$

$$= +10 \frac{v_2^{\frac{1}{4}}}{v_1^{\frac{3}{2}}} (-0.05) \cdot 16 + 5 \frac{v_1^{\frac{1}{2}}}{v_2^{\frac{3}{4}}} (0.005) \cdot 8$$

$$= -10 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{100} \cdot 16 + 5 \cdot \frac{4}{27} \cdot \frac{5}{1000} \cdot 8$$

$$= -6 \frac{3}{10} = -5.7$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$S_{12} = 6(a_1 + a_{12}) = -9$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = 1$$

$$(sg: a_n + 8d = \dots)$$

$$x * y = 2x + xy \quad \text{auf } \mathbb{Z}$$

$$2 * x \wedge (2 * x) * x$$

$$4 + 2x \wedge 2(4 + 2x) + (4 + 2x)x$$

$$8 + 4x + 4x + 2x^2$$

$$x^2 + 4x + 8$$

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

$$(2x + xy) * z = x * (2y + yz)$$

$$2(2x + xy) + (2x + xy) \cdot z = 2x + x(2y + yz)$$

$$4x + 2xy + 2xz + xyz =$$

$$xyz + 2xy + 2xz + 4x =$$

$$x * y = 2x + xy$$

BSP: $2 * 3 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3$

$$(2 * a) * b \Leftrightarrow (4 + 2a) * b$$

$$= 2(4 + 2a) + (4 + 2a)b$$

=

$$a * a = 2a + a \cdot a$$

$$x * x = 2x + x^2 \leq 9$$

$$0 = n \quad ?$$

$$a * n = a$$

$$2a + an = a \Leftrightarrow -a = an \quad | :a$$

$$2a + a0 = a$$

$$n = -1 \rightarrow \text{neutral}$$

$$2a \neq a$$

$$a * a^{-1} = n$$

$$a * b = 0,7a + 0,7b + 3ab - 11 \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

$$1 * 2 = 0,7 \cdot 1 + 0,7 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 - 11$$

==

$$2a + a \cdot a^{-1} = n = -1$$

$$2a + a \cdot a^{-1} = -1$$

$$a \cdot a^{-1} = -1 - 2a$$

$$\frac{a^{-1}}{5-a} = \frac{-1-2a}{5-a}$$

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4x$$

$$NB \quad y = 3x^2 - 12x + 10,5$$

$$L(x,y,\lambda) = x^3 + y^2 - 4x + \lambda(3x^2 - 12x - y + 10,5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 4 + 6\lambda x - 12\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda = -2y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \quad 3x^2 - 12x - y + 10,5 = 0 \quad y = 3x^2 - 12x + 10,5$$

$$2x - 4 + 6x(6x^2 - 24x + 21) - 72x^2 + 288x - 252 = 0$$

$$36x^3 - 216x^2 + 416x - 256 = 0$$

Polynomdivision

$$\begin{aligned} 36x^3 - 216x^2 + 416x - 256 : (2x - 4) &= 18x^2 - 72x + 64 \\ &= 2(9x^2 - 36x + 32) \\ &= 18\left(x^2 - 4x + \frac{32}{9}\right) \end{aligned}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{\frac{36}{9} - \frac{32}{9}}$$

$$x = 2 + \frac{2}{3} \vee 2 - \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow = 36 \left(x - \frac{4}{3}\right) \left(x - 2\right) \left(x - \frac{8}{3}\right) \quad \frac{8}{3} \quad \frac{4}{3}$$

=

$$3x^2 - 12x - (-1,5) + 10,5$$

$$3x^2 - 12x + 12$$

$$3(x^2 - 4x + 4)$$

$$3(x-2)^2 = 0$$

$x = 2$ ergibt Extremum

in (2) einsetzen

$$12x - 12x = 0$$

in (3) einsetzen

$$3x^2 - 12x - 4 + 10,5 = 0$$

$$3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 - (-1,5) + 10,5 = 0 \checkmark$$

in (1) einsetzen

$$-3 - \lambda = 0$$

$$\lambda = -3$$

$$P(v_1, v_2) = 10 v_1^{\frac{2}{3}} v_2^{\frac{3}{4}}$$

$$p_{v_1} = \frac{20}{3} v_1^{-\frac{1}{3}} v_2^{\frac{3}{4}}$$

$$p_{v_2} = 7,5 v_1^{\frac{2}{3}} v_2^{-\frac{1}{4}}$$

$$v_1 = 27 \quad \text{fällt auf } 99,5\%$$

$$v_2 = 16 \quad \text{steigt um } \frac{1}{9}\%$$

$$dP = p_{v_1} \cdot dv_1 + p_{v_2} \cdot dv_2$$

$$= -\frac{20}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \frac{0,5}{100} \cdot 27 + 7,5 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{8}{16}$$

$$= -\frac{24}{10} + \frac{15}{25} = -2,4 + 0,6 = -1,8$$