

Eckehard Krah
Gruppe 3, Do 14⁰⁰-16⁰⁰, 53221

Prof. Dr. W. Fröhlich / Dr. K.-H. Bertsch

Übungen zur Höheren Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

WS 2000/01

72. Gegeben sei eine Funktion f mit $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2 + x_2^4 - x_2^5$.
Man untersuche f auf Extrema.

73. Man untersuche die durch $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - 3x_1 + e^{-x_2^2+4x_2} - (1-x_3)^4$ gegebene Funktion f mit $D(f) = \mathbb{R}^3$ auf lokale Extrema.

74. Man untersuche die durch $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ gegebene Funktion unter der Nebenbedingung $g(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{81} + \frac{x_2^2}{36} - 1 = 0$ mit dem Lagrange-Verfahren auf relative Extrema.

75. Man untersuche die Funktion $f(x, y, z) = 3z + 5$ unter den Nebenbedingungen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x^2 + y^2 = x$ auf lokale Extrema.

76. In der folgenden Tabelle ist jeweils zu entscheiden (und anzukreuzen), ob die Aussage wahr (w) oder falsch (f) ist. Die Angabe eines Lösungswegs ist nicht erforderlich.

	w	f
Eine Funktion f sei an der Stelle x_0 differenzierbar. Damit ist auch g mit $g(x) = f(f(x))$ an x_0 differenzierbar und es gilt $g'(x_0) = f'(f(x_0))$.	☒	☒
x_0 sei Definitionslücke einer Funktion f . Dann ist es nicht möglich, $f(x_0)$ so zu erklären, daß eine dort differenzierbare Funktion entsteht.	☒	☒
Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei an $(2, 3)$ differenzierbar. Dann existieren die beiden partiellen Ableitungen 1. Ordnung an $(2, 3)$.	☒	☒
Die Funktion f besitze an $(2, 3)$ beide reinen partiellen Ableitungen 2. Ordnung. Dann ist f an $(2, 3)$ stetig.	☒	☒
Notwendig für die Differenzierbarkeit einer Funktion an $x_0 \in \mathbb{R}$ ist, daß sie dort stetig ist.	☒	☒
Gleichungssysteme von m Gleichungen in m Unbekannten kann man immer mit Gauß - Algorithmus lösen.	☒	☒
Wenn die Koeffizientendeterminante eines linearen Gleichungssystems von n Gleichungen in n Unbekannten gleich Null ist, hat das System keine Lösung.	☒	☒
Eine Koeffizientendeterminante von 0 bei einem System von n linearen Gleichungen in n Unbekannten ist notwendig dafür, daß das System keine Lösung besitzt.	☒	☒
Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems bildet einen Vektorraum.	☒	☒
Ein lineares Gleichungssystem von m Gleichungen in n Unbekannten, dabei $m < n$, besitze eine Lösung. Die Anzahl der wählbaren Komponenten der allgemeinen Lösung ist dann mit n und dem Rang der Koeffizientenmatrix festgelegt.	☒	☒

Abgabe: bis spätestens Montag, 12.02.01, 14.00 Uhr im Postfach „Höhere Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ im Raum H-C 5326 (AVZ, Ebene 5); nicht Postfach Prof. Dr. Fröhlich!!
Bitte vermerken sie neben ihrem Namen auch ihre Gruppenzugehörigkeit bzw. -nummer!!!

72

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2^2 + 5x_2 + x_2^4 - x_2^5$$

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2^2$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) = -4x_1x_2 + 5 + 4x_2^3 - 5x_2^4$$

$$x_1 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2^2$$

Nullstellen können sein $(1, \pm 1), (4, \pm 2), (16, \pm 4), (9, \pm 3), (x, \sqrt{x})$

$$f_{x_1x_1}(x_1, x_2) = 2$$

$$f_{x_2x_2}(x_1, x_2) = 4x_1 + 12x_2^2 - 20x_2^3$$

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2^2$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) = 4x_1x_2 + 5 + 4x_2^3 - 5x_2^4 = 0$$

$$4x_2^2x_2 + 5 + 4x_2^3 - 5x_2^4 = 0$$

$$4x_2^3 + 5 + 4x_2^3 - 5x_2^4 = 0$$

$$x_1^2 - 2x_1x_2^2 + 5x_2 + x_2^4 - x_2^5$$

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2^2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2^2$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) = 4x_1x_2 + 5 + 4x_2^3 - 5x_2^4 = 0$$

$$4x_2^2x_2 + 5 + 4x_2^3 - 5x_2^4 = 0$$

$$4x_2^3 + 5 + 4x_2^3 - 5x_2^4 = 0$$

$$8x_2^3 + 5 - 5x_2^4 = 0$$

Wäre an
dieser Stelle eine
" - " so würde
 $x_2 = 1$

Oben

2

bei f_{x_2} Vorzeichenfehler.

Relative Extrema möglich

an $P_1(1, 1)$ oder $P_2(1, -1)$.

überprüfen ob welche vorliegen.

73

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - 3x_1 + e^{-x_2^2 + 4x_2} - (1-x_3)^4$$

$$f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 3 = 0$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = (-2x_2 + 4)e^{-x_2^2 + 4x_2} = 0$$

$$f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = -4(1-x_3)^3 \cdot (-1) = 4(1-x_3)^3 = 0$$

$$\text{für } x_1 = 1 \text{ v. } -1$$

$$\text{für } x_2 = 2$$

$$\text{für } x_3 = 1$$

$\Rightarrow$ relative Extrema möglich an $P_1(1, 2, 1)$ oder $P_2(-1, 2, 1)$

$$u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$f_{x_1 x_1}(x_1, x_2, x_3) = 6x_1$$

$$f_{x_2 x_2}(x_1, x_2, x_3) = -2e^{-x_2^2 + 4x_2} + (-2x_2 + 4)^2 e^{-x_2^2 + 4x_2}$$

$$f_{x_3 x_3}(x_1, x_2, x_3) = -12(1-x_3)^2$$

$$\text{für } -1 \quad f_{x_1 x_1}(x_1, x_2, x_3) = -6 < 0 \quad \text{also max}$$

$$\text{für } +1 \quad f_{x_1 x_1}(x_1, x_2, x_3) = 6 > 0 \quad \text{also min}$$

$$f_{x_2 x_2}(x_1, x_2, x_3) = -2e^{+4+8} + (-4+4)^2 \cdot e^{12} = -2e^{12}$$

$$\text{für } 1 \quad f_{x_3 x_3}(x_1, x_2, x_3) = -12(1-1)^2 = 0 \quad \text{weder max noch min}$$

Schreibweise:

$$H = \begin{pmatrix} 6x_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$H(p_1) = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_1 & \dots \\ D_2 & \dots \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ kein relatives Extrema

$$H(p_2) = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_1 & \dots \\ D_2 & \dots \\ D_3 & \dots \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dots \dots \dots$

(74)

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$g(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{81} + \frac{x_2^2}{36} - 1 = 0$$

$$f(x_1, x_2) + \lambda \left(\frac{x_1^2}{81} + \frac{x_2^2}{36} - 1 \right)$$

$$f_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 + \frac{2x_1}{81} \lambda = 0 \quad \checkmark$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_2 + \frac{x_2}{18} \lambda = 0 \quad (-)$$

$$= 2x_2 + \frac{\lambda x_2}{36} = 0 \quad \begin{aligned} &= -\frac{\lambda x_2}{36} \\ &= -x_2 \end{aligned}$$

$$f_{\lambda}(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{81} + \frac{x_2^2}{36} - 1 = 0 \quad \checkmark$$

$$= x_1^2 + \frac{9x_2^2}{4} - 81 = 0$$

Auflösen für λ, x_1, x_2

$\Rightarrow$ relative Extrema möglich sind:

$\rightarrow$ Diese dann überprüfen, ob wirklich.

75

$$f(x, y, z, \lambda_1) = 3z + 5 + \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2 (x^2 + y^2 - x) \quad \checkmark$$

$$(1) f_x(x, y, z, \lambda_1) = 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x - \lambda_2 = 0 \quad \checkmark$$

$$(2) f_y(x, y, z, \lambda_1) = 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 0 \quad \checkmark$$

$$(3) f_z(x, y, z, \lambda_1) = 3 + 2\lambda_1 z = 0 \quad \checkmark \quad \lambda_1 = -\frac{3}{2z} \quad \text{f}$$

$$(4) f_{\lambda_1}(x, y, z, \lambda_1) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

$$(5) f_{\lambda_2}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 - x = 0 \quad \checkmark \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2} \quad \text{oder } \lambda_2 = \frac{3}{2}$$

$$(2) \quad 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 0$$

$$2\lambda_1 y = -2\lambda_2 y$$

$$\lambda_1 = -\lambda_2$$

$$(1) -2\lambda_2 x + 2\lambda_2 x - \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_2 = 0 \quad \checkmark$$

$$(4) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 - x = 0$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 = x$$

in (4) einsetzen

$$x + z^2 - 1 = 0$$

$$x = -z^2 + 1$$

in (1) einsetzen

$$2\lambda_1(-z^2 + 1) + 2\lambda_2(-z^2 + 1) = 0$$

$$-2z^2\lambda_1 + 2\lambda_1 - 2z^2\lambda_2 + 2\lambda_2 = 0$$

$$-2z^2\left(-\frac{3}{2z}\right) + 2\left(-\frac{3}{2z}\right) - 2z^2\lambda_2 + 2\lambda_2 = 0$$

$$3z - 3\frac{1}{z} - 2z^2\lambda_2 + 2\lambda_2 = 0$$

$$3z - \frac{3}{z} = 0$$

$$z = \frac{1}{z}$$

$$z^2 = 1$$

$$z = 1$$

Damit

$$x=2$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 - x$$

$$= 0$$

$$4 + y^2 - 2$$

$$= 0$$

$$y^2$$

$$= -2$$

→ Punkte für mögliche Extrema bestimmen.
überprüfen mittels: Hinreichende Bedingung.

Aufgabe 72

Gegeben sei eine Funktion f mit

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2^2 + 5x_2 + x_2^4 - x_2^5$$

notwendige Bedingung für relative Extrema

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2^2 = 0 \quad (1)$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) = -4x_1x_2 + 5 + 4x_2^3 - 5x_2^4 = 0 \quad (2)$$

$$(1) \quad x_1 = x_2^2$$

$$(2) \quad -4x_2^3 + 5 + 4x_2^3 - 5x_2^4 = 0 \Rightarrow 5 = 5x_2^4 \Rightarrow x_2^4 = 1$$

$$x_2 = 1 \quad \vee \quad x_2 = -1 \quad P_1 = (1, 1)$$

$$x_1 = 1 \quad x_1 = 1 \quad P_2 = (1, -1)$$

Aufstellung der Hesse Matrix

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -4x_2 \\ -4x_2 & -4x_1 + 12x_2^2 - 20x_2^3 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_1x_2} & f_{x_2x_2} \end{vmatrix}$$

$$P_1 = (1, 1) \\ H_{P_1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -12 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = (1, -1) \\ H_{P_2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 28 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 2 > 0$$

$$D_2 = -24 - 16 < 0$$

$$D_1 = 2 > 0$$

$$D_2 = 56 - 16 > 0 \quad \left. \vphantom{D_2 = 56 - 16 > 0} \right\} \text{rel. Min an } P_2 = (1, -1)$$

mit Funktionswert -4

$$f(0, x_2) = 5x_2 + x_2^4 - x_2^5$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} f(0, x_2) = \infty$$

Keine weiteren Extrema,
Keine absoluten Extrema

Aufgabe 73

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - 3x_1 + e^{-x_2^2 + 4x_2} - (1 - x_3)^4$$

$$f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 3 \Leftrightarrow 3x_1^2 = 3 \Leftrightarrow x_1^2 = 1$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = (-2x_2 + 4)e^{-x_2^2 + 4x_2} \Leftrightarrow -2x_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2$$

$$f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = -4(1 - x_3)^3 \cdot (-1) \Leftrightarrow 4(1 - x_3)^3 \Leftrightarrow x_3 = 1$$

$$P_1(1, 2, 1)$$

$$P_2(-1, 2, 1)$$

$$f_{x_1 x_1}(x_1, x_2, x_3) = 6x_1$$

$$f_{x_2 x_2}(x_1, x_2, x_3) = (-2x_2 + 4)^2 e^{-x_2^2 + 4x_2}$$

$$f_{x_3 x_3}(x_1, x_2, x_3) = -12(1 - x_3)^2$$

$$\begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & f_{x_1 x_3} \\ f_{x_1 x_2} & f_{x_2 x_2} & f_{x_2 x_3} \\ f_{x_1 x_3} & f_{x_2 x_3} & f_{x_3 x_3} \end{pmatrix}$$

$$P_1 H \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2 + (-2x_2 + 4)) & 0 \\ 0 & 0 & 4 \cdot 3(1 - x_3)^2(-1) \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2e^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_{x_1 x_1} = 6x_1$$

$$f_{x_1 x_2} = 0$$

$$f_{x_1 x_3} = 0$$

Da hier ein Vorzeichenwechsel existiert, hier kein Extremum (evtl. Sattelpunkt) da sich die Krümmung ändert!

$$D_1 = 6 > 0$$

$$D_2 = -2e^4 < 0$$

$$D_3 = 0 \quad \text{Kein Extremum}$$

$$P_2 \hat{=} (-1, 2, 1)$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2e^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = -6$$

$$D_2 = -2e^4 > 0$$

$$D_3 = 0$$

Es kann ein relatives Max

vorliegen, aber bestimmt kein

relatives Min!

Ob einzel. Max vorliegt lässt sich nicht ermitteln.

Aufgabe 75

$$f(x, y, z) = 3z + 5$$

$$NB: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = x \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x = 0$$

$$L(\lambda, \mu, \lambda, \lambda, \lambda) = 3z + 5 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x^2 + y^2 - x)$$

$$(1) L_\lambda(\dots) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$(2) L_\mu(\dots) = x^2 + y^2 - x = 0$$

$$(3) L_x(\dots) = 2\lambda x + 2\mu x - \mu = 0$$

$$(4) L_y(\dots) = 2\lambda y + 2\mu y = 0 \quad 2y(\lambda + \mu) = 0$$

$$(5) L_z(\dots) = 2\lambda z + 3 = 0$$

$$2y(\lambda + \mu) = 0$$

$$y = 0$$

$$(2) x^2 - x = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 1$$

$$(1) z^2 = 1$$

$$z = 1 \vee -1$$

$$(3) \mu = 0$$

$$z = -1$$

$$\mu = 0$$

$$\lambda = \frac{3}{2}$$

$$(5) \lambda = -\frac{3}{2}$$

1. Schritt

2. Schritt

$$P_1 = (0, 0, 1) \text{ mit } \lambda = -\frac{3}{2}$$

$$P_2 = (0, 0, -1) \text{ mit } \lambda = \frac{3}{2}, \mu = 0$$

$$\lambda = -\mu$$

$$(3) -2\mu x + 2\mu x - \mu = 0$$

$$\mu = 0 \text{ somit } \lambda = 0$$

$$(5)$$

$$3 = 0$$

W

$$(1) z^2 = 0$$

$$z = 0$$

$$(5) 0 = 3$$

W

Somit keine Lösung

Es gibt daher nur zwei Lösungen

P_1 und P_2

Welche dieser Lösungen liefert vielleicht ein Extremum?

Aufgabe 75

$$f(x, y, z) = 3z + 5, \quad \text{NB } x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = x$$

$$L(x, y, z) \stackrel{!}{=} 3z + 5 + \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2 (x^2 - x + y^2)$$

$$L_x(x, y, z) = 2\lambda_1 x + \lambda_2 (2x - 1)$$

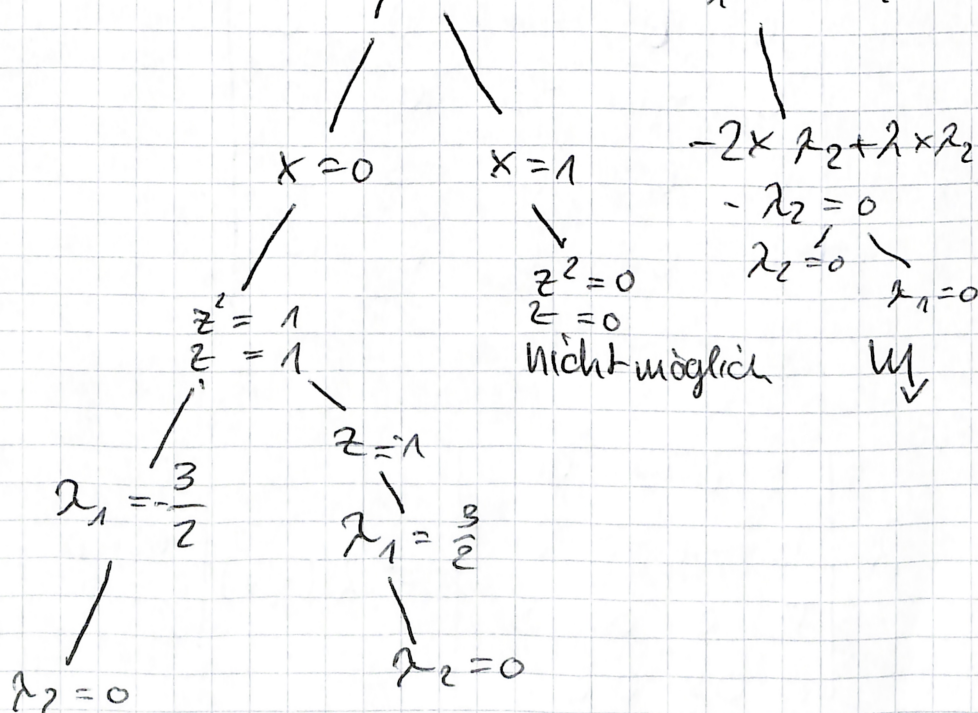
$$L_y(x, y, z) = 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y$$

$$L_z(x, y, z) = 3 + 2\lambda_1 z$$

$$L_{\lambda_1}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$L_{\lambda_2}(x, y, z) = x^2 + y^2 - x$$

$$2y(\lambda_1 + \lambda_2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee \lambda_1 = -\lambda_2$$



$$P_1 = (0, 0, 1) \quad \lambda_1 = -\frac{3}{2} \quad \lambda_2 = 0$$

$$P_2 = (0, 0, -1) \quad \lambda_1 = \frac{3}{2} \quad \lambda_2 = 0$$

Notw. Bed.

$$n = 3, m = 5$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 2x-1 & 2y & 0 \\ 2x & 2x-1 & 2z_1+2z_2 & 0 & 0 \\ 2y & 2y & 0 & 2z_1+2z_2 & 0 \\ 2z & 0 & 0 & 0 & 2z_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12 < 0$$

an P_2 liegt rel. Maximum vor mit $f(0,0,1) = 8$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x & -2y & 2z \\ 0 & 0 & 2x-1 & 2y & 0 \\ 2x & 2x-1 & 2z+2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 2y & 2y & 0 & 2x+2\lambda_1 & 0 \\ 2z & 0 & 0 & 0 & 2z_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$-2 \quad (-1) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad 2(6) = 12 > 0 \quad \text{bel min an } P_2$$

Funktionswert $P_2 = 2$