

Zusatzübung

✓ Aufgabe Z1:

Ein Gartenmöbelproduzent spezialisiert sich neuerdings auf die Herstellung von Hollywoodschaukeln, von denen er im Vorjahr 8.000 Stücke herstellte. Im laufenden Geschäftsjahr mit wiederum 200 Arbeitstagen werden nun 12.000 Stücke mit dem unveränderten Personalbestand von 100 Mitarbeitern produziert. Jedoch wurde gegenüber dem Vorjahr die tägliche Arbeitszeit von 8 auf 7,5 Stunden gekürzt, der Kapitaleinsatz durch Rationalisierungsinvestitionen um 200.000 € auf 1,2 Mio. € erhöht. Definieren Sie die Begriffe Produktivität sowie Arbeits- und Kapitalproduktivität, und berechnen Sie diese für beide Jahre. Geben Sie stichwortartig jeweils zwei mögliche Gründe für die geänderten Produktivitäten an.

✓ Aufgabe Z2:

- Erläutern Sie, was unter einer Leontief-Produktionsfunktion zu verstehen ist!
- Erläutern Sie die in der Leontief-Produktionsfunktion abgebildeten Input-Output-Beziehungen in 3-4 Sätzen!
- Geben Sie die Leontief-Produktionsfunktion in allgemeiner Form an (mit Symbolverzeichnis!)

Aufgabe Z3:

An bereits zugeschnittenen Stahlblechen sind verschiedene Bohrungen durchzuführen. Für den Bohrarbeitsplatz stehen folgende Informationen zur Verfügung (FE = Faktoreinheit, ME = Mengeneinheit des Stahlblechs):

Produktionsfaktor	Produktionskoeffizient (FE/ME)	Faktorpreis (€/FE)
Maschine	0,2 h/ME	20 €/h
Arbeit	0,2 h/ME	50 €/h
elektrische Energie	2,0 kWh/ME	0,25 €/kWh
Schmiermittel	0,1 l/ME	10 €/l

Hinweis: Maschine und Arbeitskraft stehen 35 Std. pro Woche zur Verfügung, elektrische Energie und Schmiermittel können unbeschränkt fremdbezogen werden.

Begründen Sie knapp, ob es sich hier um limitationale oder substitutionale Produktionsfaktoren handelt.

Stellen Sie erst jeweils allgemein und dann für die obige Datensituation die zugehörige Produktionsfunktion und die Kostenfunktion für eine Woche auf (mit Symbolverzeichnis!)

Berechnen Sie die maximal mögliche Ausbringungsmenge (mit Begründung!) sowie die damit verbundenen Kosten!

Aufgabe Z4:

Ein Lebensmittelproduzent stellt gebrauchsfertige Nudelsoßen her. Aufgrund rechtlicher Vorschriften muss er das auf der Verpackung angegebene Verhältnis zwischen Fleischeinwaage (r_1) und Flüssigkeit (r_2) in der Produktion genau einhalten. Jede Packung enthält danach 0,24 l Flüssigkeit und 0,06 kg Fleisch. Ferner wurde die folgende Kostenfunktion ermittelt: $K(r_1, r_2) = 6,80 \times r_1 + 0,80 \times r_2$. Leiten Sie zunächst die Isokostenfunktion für den Kostenbetrag von 5.000 Euro her. Bestimmen Sie sodann die Gleichung für die Prozessgerade. Wieviele Packungen Soße (x) kann der Produzent mit dem Kostenbudget von 5.000 Euro maximal herstellen? Geben Sie zu Ihren Berechnungen stichwortartig Anmerkungen, aus denen Ihre Vorgehensweise ersichtlich wird (Rundungen auf 2 Nachkommastellen).

Aufgabe 21:

8000 Stück im Vorjahr

200 Arbeitstage in beiden GJ; 100 Mt in beiden GJ

12000 Stück im laufenden GJ

Arbeitszeit 8 Stunden im Vorjahr

7,5 Stunden im laufenden GJ

Kapital im Vorjahr 1000 000

Laufenden Jahr 1200 000

$$\text{Produktivität} = \frac{\text{Ausbringungsmenge}}{\text{Faktoreinsatz}}$$

$$\text{Arbeitsproduktivität} = \frac{\text{Ausbringungsmenge}}{\text{Arbeitsansatz}}$$

$$\text{Kapitalproduktivität} = \frac{\text{Ausbringungsmenge}}{\text{Kapitalansatz}}$$

Arbeitsproduktivität im Vorjahr:

$$AP = \frac{8000}{200 \cdot 8 \cdot 100}$$

$$AP = \frac{8000}{160000}$$

$$AP = \underline{\underline{0,05}}$$

Arbeitsproduktivität im laufenden GJ:

$$AP = \frac{12000}{200 \cdot 7,5 \cdot 100}$$

$$AP = \frac{12000}{150000}$$

$$AP = \underline{\underline{0,08}}$$

Kapitalproduktivität im Vorjahr:

$$KP = \frac{8000}{1000000}$$

$$KP = \underline{\underline{0,008}}$$

Kapitalproduktivität im laufenden GJ

$$KP = \frac{12000}{1200000}$$

$$= \underline{\underline{0,01}}$$

→ Anstieg der Arbeitsproduktivität im laufenden GJ gegenüber dem Vorjahr erklärt sich aus dem Anstieg des Outputs bei gleichzeitiger Senkung der täglichen Arbeitszeit

→ Anstieg der Kapitalproduktivität im laufenden GJ gegenüber dem Vorjahr erklärt sich durch den Anstieg des Output. Die Neuinvestitionen von 200000 [€] dämpfen jedoch diesen Anstieg etwas.

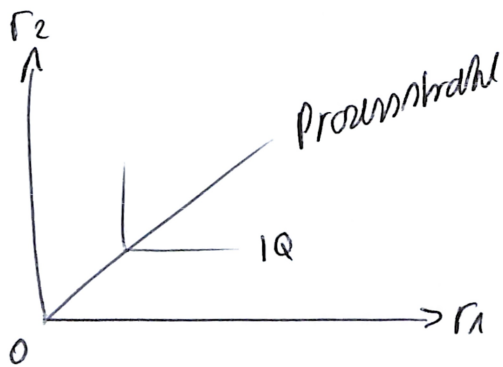
Aufgabe 22:

a) Leontief PF:

Die Leontief PF ist linear-limitational, Die Einsatzverhältnisse sind fest vorgegeben. Die Einsatzfaktoren können nicht durch einander substituiert werden.

Alle effizienten FEK liegen auf dem Proportionalstrahl.

- b)
- Die Input-Output Beziehungen der Leontief PF sind fest vorgegeben.
 - Mit Ausstieg der Produktionsfaktoren steigt auch der Output konstant an.
 - Die Inputfaktoren können nicht durch einander substituiert werden.



• Alle optimalen Input-Output-Beziehungen liegen auf dem Proportionalstrahl.

Leontief PF: Outputorientiert:

$$X = \min \left\{ \frac{r_a}{a_a} ; \frac{r_b}{a_b} ; \dots ; \frac{r_n}{a_n} \right\}$$

2) Inputorientiert:

$$X = \max \left\{ x \mid x \leq \frac{r_i}{a_i} ; i = 1, \dots, n \right\}$$

Aufgabe 23!

Es handelt sich hier bei um eine limitationale Produktionsfunktion, da die Faktoreinsatzmengen fest vorgegeben sind.

$$\begin{aligned}x &= \min \left\{ \frac{r_1}{a_{11}} ; \dots ; \frac{r_n}{a_{n1}} \right\} \\&= \min \left\{ \frac{35}{0,2} ; \frac{35}{0,2} ; \frac{r_3}{2,0} ; \frac{r_3}{0,11} \right\}\end{aligned}$$

Kostenfunktion

$$K(x) = K_f + K_v x$$

$$= r_1 q_1 + r_2 q_2 + x (a_{31} q_3 + a_{41} q_4)$$

$$= 35 \cdot 20 + 35 \cdot 50 + x (0,25 q_3 + 10 q_4)$$

$$= 700 + 1750 + x (0,25 \cdot 2,0 + 0,11 \cdot 10)$$

$$= 2450 + 1,5x$$

$$K = \underline{\underline{2712,5}}$$

$$\text{mit } x = \frac{35}{0,2} = \underline{\underline{175}}$$

Aufgabe 24:

Nudelsäße $\begin{cases} \rightarrow \text{Flächennutzungs} (r_1) & 0,06 \text{ kg/Packung} \\ \rightarrow \text{Flüssigkeit} (r_2) & 0,24 \text{ l/Packung} \end{cases}$

Kostenfunktion:

$$K(r_1, r_2) = 6,80 \cdot r_1 + 0,80 \cdot r_2$$

Isokostenfunktion für Kostenbetrag von 5000 Euro

$$5000 = 6,80 r_1 + 0,80 r_2$$

$$r_2 = \frac{5000 - 6,8 r_1}{0,8}$$

Gleichung der Preisgerade

$$\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}$$

$$\frac{r_1}{0,06} = \frac{r_2}{0,24}$$

$$r_2 = 4 r_1$$

Maximale Herstellungsmenge mit dem Kostenbudget von 5000 Euro

$$4 r_1 = \frac{5000 - 6,8 r_1}{0,8}$$

$$3,2 r_1 = 5000 - 6,8 r_1$$

$$r_1 = 500$$

$$r_2 = 4 \cdot 500 = 2000$$

Outputorientierte Leontief Produktionsfunktion

allgemein:

$$x_{\max} = \min \left\{ \frac{r_i}{a_i} \mid \text{mit } i = 1, \dots, n \right\}$$

$$x_{\max} = \min \left\{ \frac{500}{0,06} ; \frac{2000}{0,24} \right\}$$

$$x_{\max} = \min \{ 8333,33 ; 8333,33 \}$$

$$x_{\max} = \underline{\underline{8333}}$$

Aufgabe 21:

①

Vorgahr:

8000 Stück
200 Arbeitstage
100 Mitarbeiter
8 Stunden Arbeitszeit

1000000 Kapitaleinsatz

Laufendes GJ:

12000 Stück
200 Arbeitstage
100 Mitarbeiter
7,5 Stunden Arbeitszeit

1200000 Kapitaleinsatz

$$\bullet \text{ Produktivität} = \frac{\text{Ausbringungsmenge}}{\text{Einsatzmenge der Faktorart}} \frac{[ME]}{[ME]}$$

→ die Produktivität gibt an, wieviel Ausbringungsmenge ich für eine Mengeneinheit der Einsatzmenge der Faktorart bekomme.

$$\bullet \text{ Arbeitsproduktivität} = \frac{\text{Ausbringungsmenge}}{\text{Einsatzmenge der Faktorart "Arbeit" oder Arbeitszeit}} \frac{[ME]}{[Std.]}$$

→ Die Arbeitsproduktivität gibt an, wieviel Ausbringungsmenge ich für eine Mengeneinheit der Einsatzmenge der Faktorart "Arbeit" bekomme.

$$\bullet \text{ Kapitalproduktivität} = \frac{\text{Ausbringungsmenge}}{\text{Einsatzmenge des Kapitals}} \frac{[UE]}{[GE]} \quad (2)$$

→ Die Kapitalproduktivität gibt an, wieviel Ausbringungsmenge man für eine Einsatzmenge des Kapitals (für 1 Geldeinheit) bekommt

• Berechnung der Arbeitsproduktivität für das Vorjahr:

$$AP_{\text{Vorjahr}} = \frac{8000}{200 \cdot 100 \cdot 8}$$

$$AP_{\text{Vorjahr}} = \frac{8000}{160000}$$

$$AP_{\text{Vorjahr}} = \underline{\underline{0,05}}$$

• Berechnung der Arbeitsproduktivität für das laufende GJ

$$AP_{\text{laufendes GJ}} = \frac{12000}{200 \cdot 100 \cdot 7,5}$$

$$AP_{\text{laufendes GJ}} = \frac{12000}{150000}$$

$$AP_{\text{laufendes GJ}} = \underline{\underline{0,08}}$$

- ③
- Berechnung der Kapitalproduktivität für das Vorjahr

$$Kp_{\text{Vorjahr}} = \frac{8000}{1.000.000}$$

$$Kp_{\text{Vorjahr}} = \underline{\underline{0,008}}$$

- Berechnung der Kapitalproduktivität für das laufende Geschäftsjahr

$$Kp_{\text{laufendes GJ}} = \frac{12000}{1.200.000}$$

$$Kp_{\text{laufendes GJ}} = \underline{\underline{0,01}}$$

- Zwei Gründe für die geänderten Produktivitäten:

- 1) Verbesserung der Arbeitsbedingungen.
- 2) Motivation durch Verringerung der täglichen Arbeitszeit.

• Aufgabe 22

- d) • bei der Leontief Produktionsfunktion sind die Einsatzfaktoren proportional zur Ausbringungsmenge
- Die Produktionskoeffizienten bleiben bei Veränderung der Ausbringungsmenge gleich.

- e) • bei der Leontief PF ändern sich die Einsatzfaktoren proportional zur Ausbringungsmenge
- Die Produktionskoeffizienten bleiben bei Veränderung der Ausbringungsmenge gleich
 - Ändert sich die Ausbringungsmenge, ändern sich die Einsatzmengen in gleichem Verhältnis

c) outputorientierte Darstellung:

$$x_{\max} = \min \left\{ \frac{v_i}{a_i} ; i = 1, \dots, n \right\}$$

Aufgabe 23

5

- Es handelt sich hierbei um limitationale Produktionsfaktoren, da diese durch den Produktionskoeffizienten fest vorgegeben sind.
- Erstellung der Produktionsfunktion (outputorientiert)

allgemein:

$$x_{\max} = \min \left\{ \frac{r_i}{a_i} \mid i = 1, \dots, n \right\}$$

speziell:

$$x_{\max} = \min \left\{ \frac{35}{0,2} \mid \frac{35}{0,2} \mid \frac{13}{2,0} \mid \frac{14}{0,1} \right\}$$

$$x_{\max} = \min \left\{ 175; 175; \frac{13}{2,0} \mid \frac{14}{0,1} \right\}$$

$$x_{\max} = \underline{\underline{175}}$$

Symbolverzeichnis:

$x_{\max}$ = maximale Ausbringungsmenge

r_i = Einsatzfaktor / Produktionsfaktor

a_i = Produktionskoeffizient

Begründung:

- da r_3 und r_4 unbeschränkt hochbezogen werden können, fallen sie von vornherein aus!
- Man konzentriert sich also nur noch auf r_1, r_2

(6)

- Berechnung der Kosten

$$K = K_F + K_v \cdot x$$

$$K_F = 35 \cdot 20 + 35 \cdot 50$$

$$K_F = 700 + 1750$$

$$K_F = \underline{\underline{2450}}$$

$$K_v = 0,25 \cdot 2,0 + 10 \cdot 0,11$$

$$K_v = 0,5 + 1$$

$$= \underline{\underline{1,5}}$$

$$K = 2450 + 1,5x$$

- durch Einsetzen von $x_{\max} = 175$ folgt:

$$K = 2450 + 1,5 \cdot 175$$

$$K = 2450 + 262,5$$

$$K = \underline{\underline{2712,5}}$$

Aufgabe 24:

7

Packung $\begin{cases} \text{Flächeinwaage } r_1 & 0,06 \text{ kg / Packung} \\ \text{Flüssigkeit } r_2 & 0,24 \text{ l / Packung} \end{cases}$

$$J(r_1, r_2) = 6,80 \cdot r_1 + 0,80 \cdot r_2$$

- Isokostenfunktion für den Kostenbetrag von 5000 Euro

$$5000 = 6,8 r_1 + 0,8 r_2$$

$$r_2 = \frac{5000 - 6,8 r_1}{0,8}$$

- Berechnung der Gleichung der Preisgerade

allgemein:

$$\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}$$

speziell:

$$\frac{r_1}{0,06} = \frac{r_2}{0,24}$$

$$r_2 = 4 r_1$$

- Gleichsetzen von Isokostenfunktion und Preisgerade

$$\frac{5000 - 6,8 r_1}{0,8} = 4 r_1 \quad | \cdot 0,8 \quad | + 6,8 r_1$$

$$5000 = 10 r_1$$

$$r_1 = 500 ; \quad r_2 = 2000$$

- Maximale Ausbringung bei einem Fixkostenbudget von 500 € (8)

$$x_{\max} = \min \left\{ \frac{500}{0,06} ; \frac{2000}{0,24} \right\}$$

$$x_{\max} = \min \{ 8333,33 ; 8333,33 \}$$

$$x_{\max} = \underline{\underline{8333}}$$

Aufgabe 23:

Es handelt sich um eine lineare PF, da die Produktionskoeffizienten fest vorgegeben sind.

$$x_{\max} = \min \left\{ \frac{35}{0,2}, \frac{35}{0,2}, \frac{13}{20}, \frac{14}{0,1} \right\}$$

$$x_{\max} = 175$$

$$V(x, q) = \sum_{i=1}^n v_i \cdot q_i$$

$$= 35 \cdot 20 + 35 \cdot 50 + (2,0 \cdot 0,25 + 0,1 \cdot 10) \cdot x$$

$$= 700 + 1750 + (0,5 + 1) \cdot x$$

$$= \underline{\underline{2450 + 1,5x}}$$

$$= 2450 + 175 \cdot 1,5$$

$$= 2712,5$$

Aufgabe 24:

Soße $\rightarrow$ Flüssigkeitswaage r_1 0,06 kg
 $\rightarrow$ Flüssigkeit r_2 0,24 l

$$A(r_1, r_2) = 6,8 r_1 + 0,8 r_2$$

$$5000 = 6,8 r_1 + 0,8 r_2$$

$$r_2 = \frac{5000 - 6,8 r_1}{0,8}$$

Gleichung der Proportionalgeraden

$$\frac{r_1}{0,06} = \frac{r_2}{0,24}$$

$$r_2 = 4 r_1$$

$$\frac{5000 - 6,8 r_1}{0,8} = 4 r_1$$

$$5000 - 6,8 r_1 = 3,2 r_1$$

$$5000 = 10 r_1$$

$$r_1 = 500 \quad ; \quad r_2 = 2000$$

$$\rightarrow x_{\max} = \min \left\{ \frac{500}{0,06}, \frac{2000}{0,24} \right\}$$
$$= \underline{\underline{8333}}$$

Aufgabe 24!

Sorpe $\rightarrow$ flächenmenge v_1 0,06
 $\rightarrow$ flächenleit v_2 0,24

$$h(v_1, v_2) = 6,8v_1 + 0,8v_2$$

$$5000 = 6,8v_1 + 0,8v_2$$

$$v_2 = \frac{5000 - 6,8v_1}{0,8}$$

$$\frac{v_1}{0,06} = \frac{v_2}{0,24}$$

$$v_2 = 4v_1$$

$$4v_1 = \frac{5000 - 6,8v_1}{0,8} \quad | \cdot 0,8$$

$$3,2v_1 = 5000 - 6,8v_1$$

$$10v_1 = 5000$$

$$v_1 = 500$$

$$v_2 = 4000$$

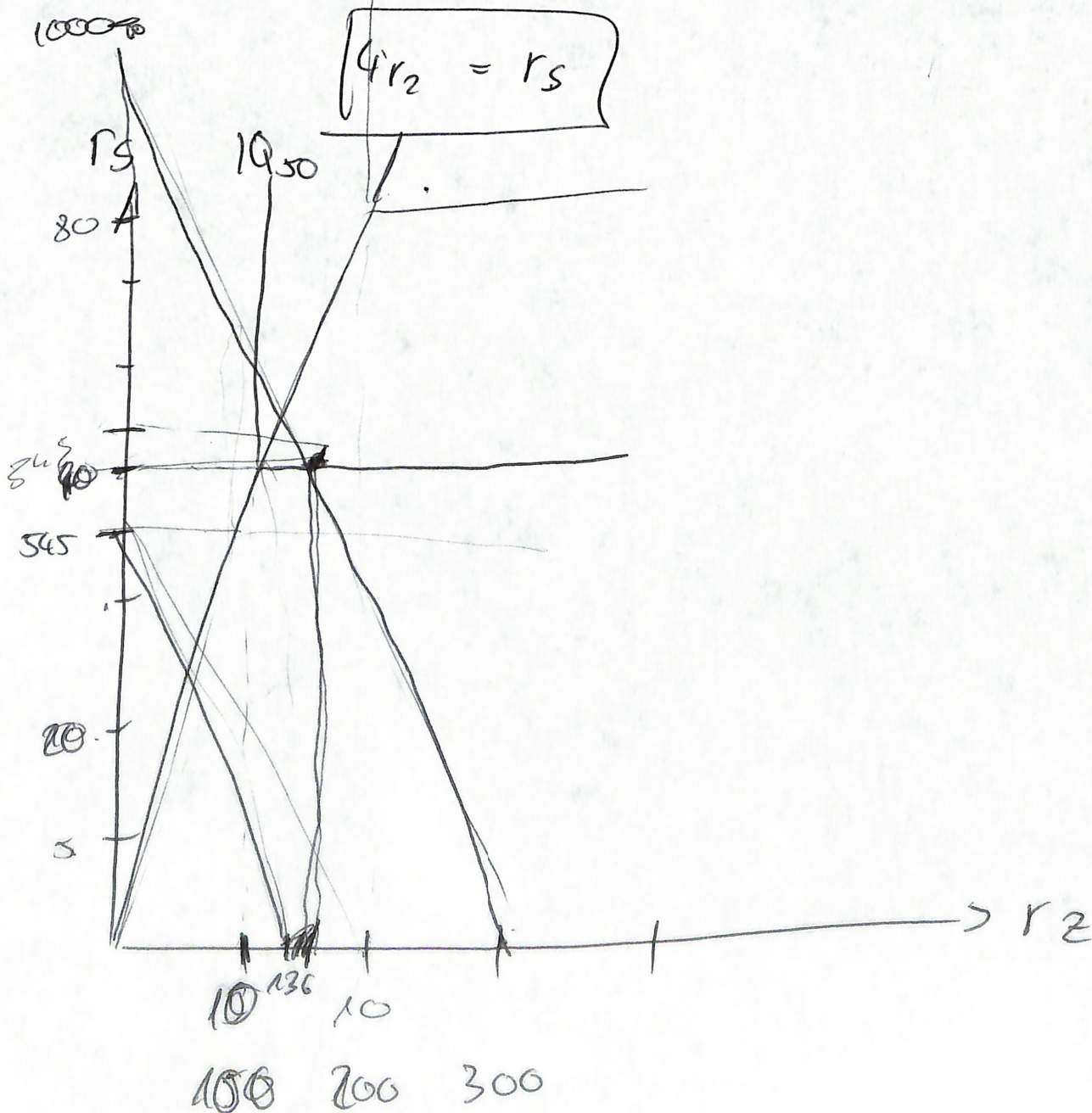
$$x_{\max} = \min \left\{ \frac{500}{0,06} ; \frac{4000}{0,24} \right\}$$
$$= 8333$$

Prozesswahl: Ausprägungsgrade auf der nicht
alle attr. FE MK beeinflussen
ohne Durchw.

$$\frac{V_5}{a_5} = \frac{V_2}{a_2}$$

$$\frac{r_5}{10 \frac{4}{5}} = \frac{r_2}{\frac{1}{5}}$$

$$4r_2 = r_5$$



Aufgabe 7.2.

Prod. Koef.

allg.

$$X = \frac{r_i}{a_i}$$

~~Stoff~~

Speziell für Sandgemisch:

$$X = \frac{r_s}{a_s}$$

$$50 = \frac{40}{a_s}$$

$$50 a_s = 40$$

$$a_s = \frac{40}{50}$$

$$a_s = \frac{4}{5}$$

Speziell für Zement:

$$50 = \frac{10}{a_z}$$

$$a_z = \frac{1}{5}$$

3.1. Zement 0,1 $\frac{GE}{kg}$

Sand 0,03

Rechenpunkt

allgemein

$$K(r_i, q_i) = \sum_{i=1}^n r_i \cdot q_i$$

speziell

$$30 = r_z \cdot q_z + r_s \cdot q_s$$

$$30 = r_z \cdot 0,1 + r_s \cdot 0,03$$

$$r_s \cdot 0,03 = 30 - r_z \cdot 0,1$$

$$r_s = \frac{30 - r_z \cdot 0,1}{0,03}$$

$$r_s = 1000 - 3,33 r_z$$

für $r_s = 0$

$$r_z = 300$$

für $r_z = 0$
 $r_s = 1000$

d)

$$\begin{aligned} h(r_2, r_5) &= 0,1 \cdot 20 + 0,03 \cdot 80 \\ &= 2 + 2,4 \\ &= \underline{\underline{4,4}} \end{aligned}$$

e)

$$1000 - 3,33r_2 = 4r_2$$

$$1000 = 7,33r_2$$

$$r_2 = \underline{\underline{136,36}}$$

$$r_5 = 4 \cdot 136,36$$

$$r_5 = \underline{\underline{545,479}}$$

für 100

Sand

$$x = \frac{r_s}{a_s}$$

$$100 = \frac{r_s}{\frac{4}{5}}$$

$$100 \cdot \frac{4}{5} = r_s$$

$$r_s = 80$$

Zent

$$x = \frac{r_z}{a_z}$$

$$100 = \frac{r_z}{\frac{1}{5}}$$

$$r_z = 20$$

4)

$$X_{\max} = \min \left\{ \frac{136,36}{\frac{1}{5}} ; \frac{545,479}{\frac{4}{5}} \right\}$$

$$X_{\max} = \underline{\underline{681,8}}$$